目　　录

§1　参数曲面：局部理论

在本书中，我们用$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示n维欧氏空间$E^n$中的一个点，并设D是u平面$u=(u_1, u_2)$内的一个区域。这里，暂时把$E^n$内的一个曲面定义为u平面内某个域D到$E^n$内的一个可微变换$x(u)$。以后，在§6中将给出曲面的整体定义。但是，在那以前“曲面”这个词将表示上述意义。

我们用

$$M=(m_{ij}); \quad m_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \quad i=1, \cdots, n; \ j=1, 2$$

来表示映射$x(u)$的雅可比(Jacobian)矩阵。但是，要注意M的行向量是

$$\frac{\partial x}{\partial u_j}=\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j}\right)$$

两个向量$V=(v_1, \cdots, v_n)$，$W=(w_1, \cdots, w_n)$的内积用

$$V \cdot W=\sum_{k=1}^{n} V_k W_k$$

来表示，而用

$$V \wedge W; \qquad V \wedge W \in E^N, \qquad N=\binom{n}{2}$$

表示外积。在这里$V \wedge W$的分量是按一定顺序排列的行列式

$$\det\begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}, \qquad i<j.$$

最后，引进矩阵

$$G=(g_{ij})=M^TM;$$

$$g_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j}=\frac{\partial x}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_j},\tag{1.1}$$

並根据拉格朗日（Lagrange）恒等式可得：

$$\det G=\left|\frac{\partial x}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial x}{\partial u_2}\right|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2\tag{1.2}$$

有了以上准备工作，我们可以给出一个纯代数形式的基本引理：

引理 1.1 设$X(u)$是$D\rightarrow E^n$的一个可微映射，则在D的每一点处以下各条件是等价的：

向量 $\frac{\partial x}{\partial u_1}$，$\frac{\partial x}{\partial u_2}$ 是无关的，　　(1.3)

雅可比矩阵M的秩为2，　　(1.4)

$\exists i$，j：$1\leqslant i<j\leqslant n$，使得

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)}\neq 0,\tag{1.5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial x}{\partial u_2}\neq 0,\tag{1.6}$$

$$\det G>0.\tag{1.7}$$

证明： 利用公式（1.2）以及关于矩阵秩的一些基本性

质就可证得它们的等价性。

定义： 如果在曲面S上某点处，引理1.1的条件成立，则称S在此点正则。如果S在D的每一点正侧，则称S是一个正则曲面。

若在区域D内，函数 $X(u)\in C^r$ 级也就是说S的每个点的坐标 x_k 在D内是 u_1，u_2 的r次连续可微函数，则记作 $S\in C^r$ 级，而在本书中，始终假定 $S\in C^r$ 级且 $r\geqslant 1$。

假设S是域D内的一个曲面，$X(u)\in C^r$ 级，$u(\tilde{u})\in C^r$ 级是域 $\tilde{D}$ 到D上的一个微分同胚，那么就把在 $\tilde{D}$ 内由 $X(u(\tilde{u}))$ 所确定的曲面 $\tilde{S}$ 称作是由曲面S通过参数变换而得到的。当把S通过参数变换而得到了曲面 $\tilde{S}$ 时，如果S的所有性质在 $\tilde{S}$ 的所有对应点上也具备，则称S的这个性质是与参数无关的。微分几何的任务就是准确地研究那些与参数无关的性质。下面举一些例子：

首先可注意，若变换 $u(\tilde{u})$ 的雅可比矩阵是

$$U=(u_{ij}):\qquad u_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j},$$

则由 $u(\tilde{u})$ 是微分同胚这个条件就可得出在 $\tilde{D}$ 内，

$$\frac{\partial(u_1,\ u_2)}{\partial(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2)}=\det U\neq 0\text{。}$$

再根据链法则，由 $S\in C^r$ 级及 $u(\tilde{u})\in C^r$ 级可见 $\tilde{S}\in C^r$ 级。因此，$S\in C^r$ 级这个性质是与参数（C^r 级参数变换）无关的。特别是，根据

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k},$$

或写成矩阵形式

$$\tilde{M} = MU,$$

可得

$$\tilde{G} = U^T G U \tag{1.8}$$

及

$$\det\tilde{G} = \det G(\det U)^2$$
$$= \det G\left(\frac{\partial(u_1, \ u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \ \tilde{u}_2)}\right)^2。 \tag{1.9}$$

于是，根据（1.7），从（1.9）可直接推出S在某点是正则的这个性质也是与参数无关的。

现在，假设Δ是D的一个子域且Δ的闭包$\bar{\Delta}\subset D$，设Σ是曲面X(u)限于u∈Δ上的一部份，则定义Σ的面积为

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det G}\, du_1 du_2 \tag{1.10}$$

如果$u(\tilde{u})$是把$\bar{\Delta}$映射到Δ的一个参数变换，利用（1.9）以及重积分的变量替换法则可得到相应的曲面$\tilde{\Sigma}$的面积为

$$A(\tilde{\Sigma}) = \iint_{\tilde{\Delta}^*} \sqrt{\det\tilde{G}}\, d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2$$

---

* 译者注：此处原书为$\tilde{A}$

$$=\iint_{\tilde{\Delta}}\sqrt{\det G}\left|\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)}\right| d\tilde{u}_1, d\tilde{u}_2$$

$$=\iint_{\Delta}\sqrt{\det G}\, du_1 du_2 = A(\Sigma)$$

所以，曲面的面积也是与参数无关的。

为了研究问题方便，经常需要选取特殊的参数，令 i 和 j 表示从 1 至 n 中任意两个固定的不同整数，并设 D 是 x_i，x_j 平面内的一个域，则方程

$$x_k = f_k(x_i, x_j) \qquad K = 1, \cdots, n; \quad K \neq i, j; \ (x_i, x_j) \in D \quad (1.11)$$

就确定了 E^n 内的一个曲面，按这种方法定义的曲面称作是给出了曲面的非参数形式或显式方程。当然这是一种特殊情形，所取的参数是 E^n 内的两个坐标。换句话说，可以把 (1.11) 再写成下述形式：

$$x_i = u_1, \quad x_j = u_2, \quad x_k = f_k(u_1, u_2), \quad k \neq i, j \qquad (1.12)$$

在 n=3 的情况下，函数 f_k 只有一个，因此可以通过把某一个坐标表示成另外两个坐标的函数来定义曲面。

为了把曲面表示成非参数形式，显然必须要求限制于曲面上的射影映射

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (x_i, x_j) \qquad (1.13)$$

是 1—1 的。一般讲，这个要求对整个曲面是不成立的，但是我们有下面重要的引理。

引理 1.2 设 S 是一个曲面 $x(u)$，$u=a$ 是曲面上的一个

正则点，则存在着 a 的一个邻域Δ，使得当把 $x(u)$ 限制于Δ而得到的曲面 Σ，有一个以非参数形式再参数化了的曲面 $\tilde{\Sigma}$。

证明：根据正则性条件（1.5），並利用逆映射定理可知：存在着 a 的一个邻域Δ，在这个邻域 Δ 内，映射 $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_i, x_j)$ 是微分同胚的。此外，如果 $x(u) \in C^r$ 级，则其逆映射 $(x_i, x_j) \longrightarrow (u_1, u_2)$ 也是 C^r 级的，因此，确定曲面$\tilde{\Sigma}$的复合映射

$$(x_i, x_j) \to (u_1, u_2) \to (x_1, \cdots, x_n) \qquad (1.14)$$

同样也是C^r级的。

于是，在研究曲面局部性质时，只要假设曲面是非参数形式的就会带来很大的方便。同时，还要注意再参数化法（1.14）表示在一个正则点的邻域内，映射$x(u)$总是 1—1 的。

为了更精确地研究曲面在一个已知点邻近的形状，就必须研究曲面上过这一点的所有曲线。首先“E^n内的曲线C”的含意是一个连续可微映射

$$\phi: [\alpha, \beta] \longrightarrow E^n。 \qquad (1.15)$$

其中$[\alpha, \beta]$表示实直线上的某个区间，並记作

$$x = \phi(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta;$$
$$\phi(t) = (\phi_1(t), \cdots, \phi_n(t)) \in C^1 \qquad (1.16)$$

曲线在t_0的切向量是向量

$$x'(t_0) = (\phi_1'(t_0), \cdots, \phi_n'(t_0))。 \qquad (1.17)$$

如果$x'(t_0) \neq 0$，则称曲线在t_0点是正则的。

现在，假设用$x(u)$，$u\in D$来定义曲面S，并根据(1.15)来定义一条曲线C，如果在映射ϕ下，$[\alpha,\beta]$的象包含在映射$x(u)$下D的象内，则称曲线C在曲面S上。因为我们现在仅至力于研究局部曲面S，所以在曲面S上取某个正则点$u=a$，而且，把$x(u)$*限制于a的一个邻域，使得在此邻域内引理1.2成立。

下面仍用D来表示这个被限制的区域，用S来表示这个曲面，于是可得到表达式（1.14）而且可知映射$x(u)$在D内是1—1的。观察通过点$b=x(a)$并且在曲面S上的所有曲线C，为了固定记法可以假设存在一个固定值$t_0(\alpha<t_0<\beta)$，对于每条曲线C都有$\phi(t_0)=b$，再根据表达式（1.14）可知，对于每一条满足这个条件的曲线都对应了D内一条曲线$u(t)$而且$u(t_0)=a$，反过来，对于在D内满足$u(t_0)=a$的每条曲线$u(t)$，显然也对应了曲面S上的一条曲线$\phi(t)=x(u(t))$，而且它满足条件$\phi(t_0)=b$。求这条曲线C的切向量的公式是：

$$x'(t_0)=u_1'(t_0)\frac{\partial x}{\partial u_1}+u_2'(t_0)\frac{\partial x}{\partial u_2}, \qquad (1.18)$$

式中$\frac{\partial x}{\partial u_1}$与$\frac{\partial x}{\partial u_2}$在$u=a$点取值。

引理 1.3 在曲面S的一个正则点，如果研究过这点的所有曲线的集合则曲线在此点的所有切向量构成一个二维向量空间。

证明： 显然，在D内可找到满足条件$u(t_0)=a$并且$u_1'(t_0)$及$u_2'(t_0)$取任意指定值的曲线$u(t)$，根据（1.18）

---

* 译者注：原书是$x(a)$

可知切向量$x'(t_0)$的集合就是由两个向量$\frac{\partial x}{\partial u_1}$及$\frac{\partial x}{\partial u_2}$的所有线性组合组成的。但是又由正则性条件（1.3）可知这两个向量是无关的，因此就张成了一个二维向量空间。

定义：引理1.3所给出的向量空间称作曲面S在点$b=x(a)$的切平面，记作π或$\pi(a)$。

因此，一个曲面S在每个正则点都有一个切平面，根据定义可知它与参数无关。

由（1.11）及（1.18）可得切向量的长为

$$|x'(t_0)|^2=x'(t_0)\cdot x'(t_0)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{2}g_{ij}u_i'(t_0)u_j'(t_0) \qquad (1.19)$$

也就是说切向量$x'(t_0)$长度的平方可以用相应的切向量$u'(t_0)$的二次型来表示，这个二次型的系数矩阵为G，通常称此二次型为曲面的第一基本形式，由公式（1.10）看出可用这个二次型的系数矩阵的行列式计算曲面的面积，因为在E^n内，曲线$x(t)\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$的长度是由公式

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}|x'(t)|dt \qquad (1.20)$$

计算的，因此根据公式（1.19）就可类似地求出曲面上曲线的长度。用它来计算形如（1.16）的任意曲线C，很容易求得

$$S(t_0)=\int_{\alpha}^{t_0}|x'(t)|dt \qquad (1.21)$$

因为$S'(t_0)=|x'(t_0)|\geqslant 0\quad(\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta)$，于是得到一个单调映射：

$$S(t): [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, L] \tag{1.22}$$

若曲线C是一条正则曲线，则 $S'(t)=|x'(t)|>0$，因此映射（1.22）存在着可微逆映射t(s)。复合映射

$$\tilde{\phi}(s): [0, L] \xrightarrow{t(s)} [\alpha, \beta] \xrightarrow{\phi(t)} E^n \tag{1.23}$$

就定义了一条曲线$\tilde{C}$，称$\tilde{C}$为曲线C关于弧长为参数的参数化曲线，在每一点$\tilde{C}$的切向量是单位切向量：

$$T=\frac{dx}{ds}=\frac{x'(t)}{s'(t)}, \quad \left|\frac{dx}{ds}\right|=\frac{|x'(t)|}{s'(t)}=1 \tag{1.24}$$

下面，我们想研究一下二阶导数的意义（"二阶效应"）从现在开始，假定所讨论的曲线都是 C^2 级正则曲线。这样就可以按（1.23）把曲线关于弧长参数化了，此外，在每一点把单位切向量关于弧长的导数

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{dT}{dS} \tag{1.25}$$

定义为曲率向量。

在以下的讨论将采用引理1.3前面一段的记法，不过又附加了曲面 $S\in C^2$ 级这个假设並且规定S上通过正则点 $b=x(a)$ 的曲线都是S的 C^2 级正则曲线。下面将设法描述通过 $b=x(a)$ 点的所有曲线在此点的曲率向量。确切地说就是，如果 π 是曲面S在 $x=b(a)$ 处的切平面，用 $\pi^\perp$ 表示它的正交余集，把这个n—2维空间称作S在这点的法空间。每一个向量都由它在切空间 π 及冷空间 $\pi^\perp$ 的射影所确定。为此，我们将检查一下曲率向量在 $\pi^\perp$ 的射影。

法空间 $\pi^\perp$ 内的任一向量N称作曲面S的法向量，又因为

这个向量与$\frac{\partial x}{\partial u_1}$，$\frac{\partial x}{\partial u_2}$正交，所以可作如下计算：

$$\frac{dx}{ds}=\sum_i \frac{du_i}{ds}\frac{\partial x}{\partial u_i},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2}\frac{\partial x}{\partial u_i}+\sum_{i,j}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j},$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot N=\sum b_{ij}(N)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} \tag{1.26}$$

这里引进了记号

$$b_{ij}(N)=\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j}\cdot N, \tag{1.27}$$

式中向量$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j}$是在$u=a$点取值的，如果注意到

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=|x'(t)|^2=\sum g_{ij}u_i'(t)u_j'(t)$$

及

$$\frac{du_i}{ds}=\frac{du_i}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt}$$

就可以把（1.26）式改写成以下形式：

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot N=\frac{\sum b_{ij}(N)u_i'(t_0)u_j'(t_0)}{\sum g_{ij}u_i'(t_0)u_j'(t_0)} \tag{1.28}$$

上式右边的分子是关于切向量$u'(t_0)$的二次型，它的系数矩阵$b_{ij}(N)$依赖于曲面上的点及此点的法向量N，称这个二次型为曲面S关于法向量N的第二基本形式。但是，要注意，（1.28）的整个右端只依赖于曲线C在这点的切向量，而等式右边关于分量$u'(t_0)$的齐次性又表示它只依赖于切向

量的方向，即只依赖于单位切向量 T。因此可以把（1.28）式写成

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot N=K(N,\ T),\quad N\in\pi^{\perp},\ T\in\Pi. \qquad (1.29)$$

其中右端表示在 S 的每一点，它是法向量N与单位切向量 T 的一个有着明确意义的函数，称作 S 沿方向 T 关于法向量N 的法曲率。如果固定 N，让T变化可得量

$$k_1(N)=\max_T k(N,\ T),$$
$$k_2(N)=\min_T k(N,\ T) \qquad (1.30)$$

称作 S 在这点关于法向量 N的主曲率，然后，再引进主曲率的平均值

$$H(N)=\frac{k_1(N)+k_2(N)}{2} \qquad (1.31)$$

称作 S 在这点关于法向量N的平均曲率。

为了得到关于 $H(N)$ 的较明显的表达式，必须注意，（1.28）的右边是二次型的商，前面已用 $k_1(N)$ 及 $k_2(N)$ 来表示它的最大值和最小值，而它们又是方程

$$\det(b_{ij}(N)-\lambda g_{ij})=0 \qquad (1.32)$$

的两个根。展开这个方程可得以下形式

$$\det(g_{ij})\lambda^2-(g_{22}b_{11}(N)+g_{11}b_{22}(N)$$
$$-2g_{12}b_{12}(N))\lambda+\det(b_{ij}(N))=0。$$

因此，由两根之和可得

$$H(N)=\frac{1}{2\det(g_{ij})}(g_{22}b_{11}(N)+g_{11}b_{22}(N)$$
$$-2g_{12}b_{12}(N))。 \qquad (1.33)$$

从定义（1.27）直接可知：$b_{ij}(N)$关于N是线性的，因此，从（1.33）式可知 $H(N)$ 关于法向量$N\in\pi^{\perp}$也是线性的，所以在法空间内存在着唯一的一个向量$H\in\pi^{\perp}$，使得下式成立：

$$H(N)=H\cdot N,\qquad \forall N\in\pi^{\perp} \tag{1.34}$$

如此定义的向量H称作曲面 S 在这点的平均曲率向量。如果e_1，e_2，…，e_{n-2}是$\pi^{\perp}$的任意的规范正交基，则由（1.34）式可见，平均曲率向量H可以表示成以下形式：

$$H=\sum_{k=1}^{n-2}[H(e_k)]e_k. \tag{1.35}$$

定义：如果一个曲面的平均曲率向量在每点为零向量，则称此曲面为极小曲面。

在第三节里将会清楚地看到称曲面为极小曲面这个术语的理由，而在这里只能指出：根据（1.34）和（1.35）可得$H=0$的充要条件是$H(N)=0$（所有的$N\in\pi^{\perp}$）。于是，再根据（1.33）就可知极小曲面是通过一个含有第一、第二基本形式的方程

$$g_{22}b_{11}(N)+g_{11}b_{22}(N)-2g_{12}b_{12}(N)=0 \tag{1.36}$$

来描绘的。

§2 非参数曲面

本节将研究由方程（1.11）给出的非参数形式曲面，首先重新标记E^n的坐标，总可假定曲面方程为以下形式：

$$x_k=f_k(x_1,\ x_2),\qquad k=3,\ \cdots,\ n; \tag{2.1}$$

它也等价于

$$x_1=u_1, \qquad x_2=u_2,$$
$$x_k=f_k(u_1, u_2) \qquad k=3, \cdots, n \tag{2.2}$$

因此

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right),$$
$$\frac{\partial x}{\partial u_2}=\left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right) \tag{2.3}$$

及

$$g_{11}=1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_{12}=\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\ \frac{\partial f_k}{\partial u_2},$$
$$g_{22}=1+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2 \tag{2.4}$$

显然向量$\frac{\partial x}{\partial u_1}$与$\frac{\partial x}{\partial u_2}$是无关的，所以非参数曲面总是正则曲面。

下面，仍用 π 来表示切平面，π^+表示法空间。

引理 2.1 设N_3, …, N_n是任意 $n-2$ 个数，则存在着唯一的N_1, N_2使得 $N=(N_1, \cdots, N_n)$ 是法空间π^+内的向量。

证明： 向量 N 在 π^+ 内的充要条件是 $N\cdot\frac{\partial x}{\partial u_i}=0$ ($i=1, 2$)，于是由 (2.3) 式可得

$$N_i=-\sum_{k=3}^{n}N_k(\partial f_k/\partial u_i) \qquad i=1, 2$$

把此引理用于任意曲面可得以下引理：

引理 2.2 设由 $x(u)$ 定义了一个 c^r 级曲面 S，又设 $b=x(a)$ 是S上的一个正则点，N 是 S 在此点的法矢。则存在着 a 的一个邻域 Δ 和一个定义在 Δ的c^r 级向量 N(u)，且满足 $N(u)\in\pi^+(u)$，$N(a)=N$.

证明：根据引理 1.2 可知点a 的邻域 Δ 总是能找到的，而且只要对E^n的坐标作适当的标记后，曲面S 在 Δ内就能以（2.1）形式再参数化，设 $N=(N_1, \cdots, N_n)$ 並令

$$N_i(u)=-\sum_{k=3}^{n} N_k\frac{\partial f_k}{\partial u_i},\qquad i=1,\ 2,$$

则 N(u)就具备所要求的性质。

本节的以下部份总假定曲面 S 为 c^2 级曲面。由（2.3）可导出

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j}=\left(0,\ 0,\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i\partial u_j},\ \cdots,\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial u_i\partial u_j}\right) \tag{2.5}$$

因此，对于任意法向量N，求得

$$b_{ij}(N)=\sum_{k=3}^{n}N_k\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i\partial u_j} \tag{2.6}$$

于是，对于任意法向量 N，极小曲面方程（1.36）可取以下形式

$$\sum_{k=3}^{n}\Bigg[\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial u_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2}$$

$$-2\left(\sum_{m=3}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial u_1}\frac{\partial f_m}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1\partial u_2}$$

$$+\left(1+\sum_{m=3}^{n}\left(\frac{\partial f_m}{\partial u_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2}\Bigg]N_k=0,$$

由于分量N_3，…，N_k可以任意地选取，因此上述方程中每个$N_k(k=3, \cdots, n)$的系数必须为0，这样就得到关于$n-2$个函数f_3，…，f_n的$n-2$个方程。如果令$u_1=x_1$，$u_2=x_2$并引进向量记法

$$f(x_1, x_2)=(f_3(x_1, x_2), \cdots, f_n(x_1, x_2)), \tag{2.7}$$

则这n－2个方程可用一个简单的向量方程

$$\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}-2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=0 \tag{2.8}$$

来表示，它就是E^n内非参数极小曲面的方程。由引理1.2可知，每个正则极小曲面都是方程（2.8）的局部解。因此，今后将用方程（2.8）去研究一些局部极小曲面，本节仅由它直接给出一些特殊极小曲面的例子。由于其中有些曲面具有一些特别的性质，因此，它们对研究一般理论也是非常有用的。

首先研究当n＝3时方程（2.8）的解。此时方程（2.7）可写成$f(x_1, x_2)=f_3(x_1, x_2)$的形式，而方程（2.8）就变成一个关于纯量函数$f(x_1, x_2)$的简单方程。下面给出一些经典极小曲面。

螺旋面

$$f(x_1, x_2)=\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}$$

可证明它是方程（2.8）的唯一的调和函数解。螺旋面是唯一的直纹极小曲面。（关于所有这些曲面更详细的讨论可参的 Darboux〔1〕）

悬链面

$$f(x_1, x_2)=\cosh^{-1}r, \quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \tag{2.10}$$

或写成

$$x_1^2+x_2^2=(\cosh x_3)^2 \tag{2.11}$$

它是唯一的回转极小曲面。

Scherk 曲面

$$f(x_1, x_2)=\log\frac{\cos x_2}{\cos x_1} \tag{2.12}$$

是唯一的平移极小曲面；也就是说它是方程(2.8)中 $f(x_1, x_2)$ 取 $g(x_1)+h(x_2)$ 形式时的唯一解。

关于方程（2.8）的这些解请注意以下两点事实。第一，由于在相似变换下极小曲面的象仍是极小曲面，所以用这种方法就能显然地得到方程（2.8）的另外一些解，第二，以上各例虽然没有详细指出解的定义域，但是要注意它们之中任意一个解都不能对所有的 x_1 和 x_2 有定义。这並不是偶然的，因为在后面第 5 节将要证明的 Bernstein 定理

说明：当 $n=3$ 时，在整个 x_1，x_2 平面上不存在满足方程（2.8）的非平凡解。

现在，再研究方程（2.8）中 n 取任意数的情况。首先要注意，若每个 f_k 都是 x_1，x_2 的线性函数，那么它们显然满足方程（2.8）。此时，曲面S是平面。

当n是偶数时，可得以下特殊解。设 $Z=x_1+ix_2$，$g_1(Z)$，…，$g_m(Z)$是Z的复解析函数，式中$n=2m+2$，然后令

$$f_k(x_1, x_2)=\begin{cases}\mathrm{Re}\{g_p(z)\} & k=2p+1\\ \mathrm{Im}\{g_p(z)\} & k=2p+2\end{cases} \quad (p=1, \cdots, m)$$

把它代入方程（2.8）通过直接验证知它是方程（2.8）的解。

以上结果可叙述如下：如果把一条复解析曲线看成实欧氏空间的一个曲面，则此复解析曲线的图形总是一个极小曲面。E^4内单个函数$q_1(z)$所对应的极小曲面已由Kommerell〔1〕作了极深入的研究。

§3 最小面积的曲面

现在，我们简单地论述历史上导致研究极小曲面的有关问题，即在有相同周界的所有曲面中面积最小的曲面之特征。特别地我们要研究以下这种情形：

设S是由定义在域D上的函数$x(\mu)\in c^2$所确定的正则曲面，Γ是D内的一条闭曲线，它围成子域Δ，Σ是由限于Δ的x(u)所确定的曲面，再令$\widetilde{\Sigma}$是由Δ内的$\widetilde{x}(u)$所确定的曲面并且对于在Γ上的所有u，均有$\widetilde{x}(u)=x(u)$，若Σ的面积小于或等于每个曲面$\widetilde{\Sigma}$的面积，那么，关于曲面x(u)能得出什么结论呢？

下面，按两种不同的方式使用变分学的标准方法。首先

做曲面的法向变分，然后再考虑非参数曲面並做垂直于x_1，x_2平面的变分。

假设在D内，$N(u)\in c^1$，在$x(u)$处$N(u)$与S正交，即

$$N(u)\cdot\frac{\partial x}{\partial u_i}\equiv 0,\qquad i=1,2 \tag{3.1}$$

将此方程微分得

$$\frac{\partial N}{\partial u_j}\frac{\partial x_2}{\partial u_i}=-N\frac{\partial^2 x}{\partial u_i\partial u_j}=-b_{ij}(N) \tag{3.2}$$

设$h(u)\in c^2$级是域D内的任意函数，作曲面

$$S_\lambda;\ \tilde{x}(u)=x(u)+\lambda h(u)N(u),\qquad u\in D$$

其中λ是任意实数，微分上式得

$$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial u_i}=\frac{\partial x}{\partial u_i}+\lambda\left(h\frac{\partial N}{\partial u_i}+\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right)$$

並利用（3.1）（3.2）两式可得

$$\tilde{g}_{ij}=\frac{\partial\tilde{x}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\tilde{x}}{\partial u_j}=g_{ij}-2\lambda h b_{ij}(N)+\lambda^2 c_{ij},$$

式中c_{ij}定义在D内，是u的连续函数，

从而可见

$$\det\tilde{g}_{ij}=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2, \tag{3.3}$$

其中

$$a_0=\det g_{ij},$$

$$a_1=-2h(g_{11}b_{22}(N)+g_{22}b_{11}(N)-2g_{12}b_{12}(N)), \tag{3.4}$$

a_2关于定义于D内的 u 是 u_1、u_2、λ 的连续函数。

上述公式有直接推论如下：根据 S 是正则曲面这一条件可知，a_0在 $\overline{\Delta}$ 上有正的极小值。又因为a_1，a_2在D内是连续的，所以存在$\varepsilon>0$，使得当$|\lambda|<\varepsilon$时，$\det \widetilde{g}_{ij}>0$ 成立。换言之，当$|\lambda|<\varepsilon$时，由限于Δ的$\widetilde{x}(u)$ 所定义的曲面Σ_λ都是正则曲面。为计算它们的面积 $A(\lambda)=A(\Sigma_\lambda)$，必须注意由公式（3.3）可知，关于$\Delta$内的u以下不等式成立：

$$\left|\sqrt{\det \widetilde{g}_{ij}}-\left(\sqrt{a_0}+\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right)\right|<M\lambda_2 \quad (3.5)$$

其中M是正常数。再根据公式（1.10）和（3.4）就可得

$$A(0)=A(\Sigma)=\iint_\Delta \sqrt{a_0}\,du_1du_2$$

将（3.5）式两边积分得

$$\left|A(\lambda)-A(0)-\lambda\iint_\Delta\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right|<M_1\lambda^2$$

或写成

$$\left|\frac{A(\lambda)-A(0)}{\lambda}-\iint_\Delta\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right|<M_1\lambda$$

把关于a_0，a_1的表达式（3.4）代入，同时令$\lambda\to0$，再利用前面关于平均曲率的公式（1.33）就得到了面积的变化率

$$A'(0)=-2\iint_\Delta H(N)h(N)\sqrt{\det g_{ij}}\,du_1du_2 \quad (3.6)$$

它是h*的函数。

译者注：* 原书此处为λ。

顺便可注意，若$f(u)$是$\overline{\Delta}$内u的任意连续函数，则定义f在Σ上关于曲面面积的积分为

$$\iint_{\Sigma} f(u)dA = \iint_{\Delta} f(u)\sqrt{\det g_{ij}}\,du_1 du_2 \qquad (3.7)$$

利用这种记法，令$h(u)\equiv 1$并选择上述那族曲面S_λ，那么公式（3.6）就可写成以下形式：

$$A'(0) = -2\iint_{\Sigma} H(N)dA$$

有了此公式就可对量$H(N)$作更有意义的解释。

现在再回过来研究本节开始提出的问题，并作以下断言：若Σ的面积最小，则它的平均曲率恒为零。利用变分法的标准论证并由公式（3.6）可直接证得此结论。因为，若平均曲率不恒为零，则在Δ内必存在某个点$u=a$及法向量$N=N(a)$，使得$H(N)\neq 0$，不妨假设$H(N)>0$。由引理2.2可以找到a的一个邻域V_1及定义在V_1内的法向量$N(u)\in C^1$级，使得在点$x(u)$处，法向量$N(u)$与曲面S正交。于是，在整个V_2邻域$(a\in V_2\subset V_1)$内，$H(N)>0$总成立。并且若选取函数$h(u)$，使它满足下列条件：对于任意u，$h(u)\geqslant 0$，$h(a)>0$而当$u\overline{\in} V_2$时$h(u)\equiv 0$，此时公式（3.6）右边的积分为严格正值。但是如果取足够小的V_2使得$V_2\subset\Delta$，则在Γ上$\tilde{x}(u)=x(u)$。于是，Σ_λ就是与Σ有相同周界的曲面，而Σ的面积为最小这个假定就意味着对于所有的λ均有$A(\lambda)\geqslant A(0)$成立。因此$A'(0)=0$，这与(3.6)式$A'(0)<0$矛盾，于是证毕。

极小曲面最初是由求最小面积的曲面而提出的，并由此

面得极小曲面这个名字。此外还将看到在另外一些关系中也会出现有关极小曲面的问题，但它们的许多性质却与面积无关。

在结束这个论题之前，再利用面积达到最小这一性质导出另外几种形式的极小曲面方程。

对非参数形式曲面方程

$$x_k=f_k(x_1, x_2), \qquad k=3, \cdots, n,$$

引进向量记法

$$\mathbf{f}=(f_3, \cdots, f_m), \qquad p=\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q=\frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad S=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \tag{3.8}$$

于是极小曲面方程（2.8）可写成以下形式：

$$(1+|q|^2)\frac{\partial p}{\partial x_1}-(p\cdot q)\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)$$

$$+(1+|p|^2)\frac{\partial q}{\partial x_2}=0, \tag{3.9}$$

或写作

$$(1+|q|^2)r-2(p\cdot q)S+(1+|p|^2)t=0 \tag{3.10}$$

而方程（2.4）便可简写成

$$g_{11}=1+|p|^2, \; g_{12}=p\cdot q, \; g_{22}=1+|q|^2, \tag{3.11}$$

因此

$$\det g_{ij}=1+|p|^2+|q|^2+|p|^2|q|^2-(p\cdot q)^2. \tag{3.12}$$

对于非参数曲面还常采用以下记号：

$$W=\sqrt{\det g_{ij}} \tag{3.13}$$

假定对曲面作变分，令

$$\tilde{f}_k=f_k+\lambda h_k, \qquad k=3, \cdots, n,$$

式中 λ 是实数，在 f_k 的定义域 D 内 $h_k \in c^1$ 级。利用向量记法，令 $h=(h_3, \cdots, h_n)$，则

$$\tilde{f}=f+\lambda h, \quad \tilde{p}=p+\lambda\frac{\partial h}{\partial x_1}, \quad \tilde{q}=q+\lambda\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

因此

$$\tilde{W}^2=W^2+2\lambda x+\lambda^2 y,$$

其中

$$x=[(1+|q|^2)p-(p\cdot q)q]\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}$$

$$+[(1+|p|^2)q-(p\cdot q)p]\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

y 是 x_1，x_2 的连续函数。由此可得

$$\tilde{W}=w+\lambda\frac{x}{w}+\lambda^2 Z,$$

其中 Z 也是 x_1，x_2 的连续函数。

现在考虑在 $f(x_1, x_2)$ 的定义域内给定的一条闭曲线 Γ 并设 Δ 是 Γ 所围成的区域。如果在 Δ 上曲面 $x_k=f(x_1, x_2)$ 是所有有相同周界的曲面中面积最小的一个，则对所有在 Γ 上为零的函数 h 均有不等式

$$\iint_{\Delta} \widetilde{W} dx_1 dx_2 \geqslant \iint_{\Delta} W dx_1 dx_2。$$

而只有当

$$\iint_{\Delta} \frac{x}{w} dx_1 dx_2 = 0$$

时，上述不等式才可能成立。

把前面关于 x 的表达式代入 $\iint_{\Delta} \frac{x}{w} dx_1 dx_2 = 0$，分部积分，並利用在 Γ 上 $h = 0$ 这个条件得

$$\iint_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1+|q|^2}{w} p - \frac{p \cdot q}{w} q \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1+|p|^2}{w} q - \frac{p \cdot q}{w} p \right] \right] h dx_1 dx_2 = 0$$

按相同方法论证可知方程

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1+|q|^2}{w} p - \frac{p \cdot q}{w} q \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1+|p|^2}{w} q - \frac{p \cdot q}{w} p \right] = 0 \tag{3.14}$$

必须在Δ上处处成立。

我们曾遇到过这种形式的方程，容易证明它是由极小曲面方程（3.10）所推得的结果。事实上（3.14）式左边可写成三项之和：

$$\left[\frac{1+|q|^2}{w} \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{p \cdot q}{w} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + \frac{1+|p|^2}{w} \frac{\partial q}{\partial x_2} \right]$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{w}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{w}\right)\right]p$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+|p|^2}{w}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p\cdot q}{w}\right)\right]q$$

由公式（3.9）可知第一项等于零。若把第二项中 p 的系数展开则得到表达式

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{w}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{w}\right)$$

$$=\frac{1}{w^3}\{(p\cdot q)q-(1+|q|^2)p\}\cdot\{(1+|q|^2)r$$

$$-2(p\cdot q)s+(1+|p|^2)t\} \tag{3.15}$$

根据（3.10）式，此式也等于零。再交换p，q 与 x_1，x_2则可得第三项 q 的系数也为零。于是证得了（3.14）。

在上述论证过程中同时也证得了极小曲面方程（3.10）的每个解都满足下列二式：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{w}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{w}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p\cdot q}{w}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+|p|^2}{w}\right). \tag{3.16}$$

当取 n=3 时，这些方程是早已熟知的。从（3.16）为散度形式方程这一事实可以导出许多不能由（3.10）直接所得的结果。（例，见Radó〔3〕）以后还会看到，方程（3.16）在任意n 维的情况下也同样有重要推论。

§4 等 温 参 数

在研究曲面的那些与参数选取无关的性质时，若采用一种能把曲面的几何性质反映到参数平面的参数表示就方便了。例如，若要求参数平面到曲面上的映射是共形的，则曲面上曲线间的夹角就等于参数平面上对应曲线之间的夹角。在第一基本形式（1.1）中令

$$g_{11}=g_{22}, \qquad g_{12}=0 \tag{4.1}$$

或

$$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}, \qquad \lambda=\lambda(u)>0 \tag{4.2}$$

就解析地表示了这个性质，满足这些条件的参数 u_1、u_2 称等温参数。

若采用了等温参数，曲面论中所研究的许多基本量的表示法就变得相当简单了。例如由（4.2）可得

$$\det\ g_{ij}=\lambda^4, \tag{4.3}$$

关于求平均曲率的公式可写成

$$H(N)=\frac{b_{11}(N)+b_{22}(N)}{2\lambda^2} \tag{4.4}$$

下面再介绍一个常用的、可作为一个曲面的坐标向量的拉普拉斯（Laplacian）公式

引理 4.1 设正则曲面S是由 $x(u)\in C^2$ 级定义的，u_1、u_2 为等温参数，则

$$\Delta x = 2\lambda^2 H \tag{4.5}$$

其中H是平均曲率向量。

证明：用以定义等温参数的方程（4.1）可写成以下形式：

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} = 0$$

分别对第一个方程关于 u_1 微分及对第二个方程关于 u_2 微分可得：

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} = -\frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1},$$

因此

$$\Delta x \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} = 0$$

类似地，对第一个方程关于 u_2 微分並对第二个方程关于 u_1 微分得

$$\Delta x \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} = 0$$

所以，Δx是一个垂直于S的切平面的向量。但是，若N是S的一个任意法向量，则根据（4.4）式又有

$$\Delta x \cdot N = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} N + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \cdot N$$

$$= b_{11}(N) + b_{22}(N) = 2\lambda^2 H(N)$$

这表示$\Delta x / 2\lambda^2$是一个满足定义平均曲率向量的方程(1.34)的法向量，这就证明了（4.5）式成立。

在研究另外一些有关问题，特别是研究常数平均曲率曲

面时，公式（4.5）是很有用的，而我们仅对以下的直接推论感兴趣。

引理 4.2 设 $x(u)\in C^2$ 级确定了用等温参数表示的正则曲面S，则坐标函数 $x_k(u_1, u_2)$ 为调和函数的充要条件是S为极小曲面。

由此看到，从与最小面积完全不同的角度出发也能很自然地提出极小曲面的问题，而我们的愿望是要进一步寻求极小曲面与调和函数的关系。

引进以下一些记法。已知曲面$x(u)$，研究复值函数

$$\phi_k(\zeta)=\frac{\partial x_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \qquad \zeta=u_1+iu_2 \tag{4.6}$$

若注意以下恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\phi_k^2(\zeta)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2-2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\\
&=\left|\frac{\partial x}{\partial u_1}\right|^2-\left|\frac{\partial x}{\partial u_2}\right|^2-2i\frac{\partial x}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial u_2}\\
&=g_{11}-g_{22}-2ig_{12},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(\zeta)|^2&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2\\
&=g_{11}+g_{22},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

则可直接看出函数$\phi_k(\zeta)$有以下性质：

（a）$\phi_k(\zeta)$ 是ζ的解析函数$\Leftrightarrow x_k$是u_1，u_2的调和函数；

（b）u_1，u_2是等温参数$\Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n}\phi_k^2(\zeta)\equiv 0; \tag{4.9}$$

（c）若 u_1，u_2 是等温参数，则 S 为正则曲面$\Leftrightarrow$

$$\sum|\phi_k(\zeta)|^2\neq 0 \tag{4.10}$$

引理 4.3 设$x(u)$确定了一个正则极小曲面，其中u_1，u_2是等温参数。则由（4.6）式所定义的函数 $\phi_k(\zeta)$ 是解析函数，並且它们满足方程（4.9）和（4.10）。反之，设$\phi_1(\zeta)$，…，$\phi_n(\zeta)$ 在单连通域D内是ζ的解析函数並满足（4.9）和（4.10）两式，则在区域D上存在一个满足方程（4.6）的正则极小曲面。

证明：第一个结论根据引理4.2的性质（a）、（b）、（c）即可马上得出。

至于此定理之逆，如果定义函数

$$x_k = \mathrm{Re}\int\phi_k(\zeta)d\zeta, \tag{4.11}$$

则 x_k 是满足（4.6）式的调和函数，再次利用引理4.2中(a)、(b)、(c) 之逆就可证得结论。

由此看出，在 E^n 内研究局部正则极小曲面就等价于研究n个满足（4.9）及（4.10）式的有序解析函数。必须注意由（4.11）式求得的 x_k 均附加了常数，因此，此式所确定的各曲面之间相差一个平移。

前面的所有结果都是建立在假定曲面能借助于等温参数局部地表示出来的基础上而得到的。然而等温参数的存在性决不是显然的，在 C^1 级曲面的情况甚至不存在着等温参数。至于 C^2 级曲面，有一个常用的定理保证了它们的存在

性。但是，现在我们并不采用这个定理，因为对于极小曲面的情况，关于等温参数的存在性是可给予简单证明的。

引理 4.4 设S是一个极小曲面，则S的每一个正则点有一个邻域，在此邻域内存在着S的关于等温参数的再参数化。

证明： 首先，根据引理1.2我们总能找到正则点的一个邻域，在此邻域内曲面S可表示成非参数形式。于是在某个圆盘 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<R^2$ 内方程（3.16）成立，这些方程表示在园盘内存在着满足以下条件的函数 $F(x_1, x_2)$ 和 $G(x_1, x_2)$：

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{1+|p|^2}{w}, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_2}=\frac{p\cdot q}{w};$$
$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=\frac{p\cdot q}{w}, \qquad \frac{\partial G}{\partial x_2}=\frac{1+|q|^2}{w}。 \tag{4.12}$$

若令

$$\xi_1=x_1+F(x_1, x_2),$$
$$\xi_2=x_2+G(x_1, x_2), \tag{4.13}$$

则求得

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}=1+\frac{1+|p|^2}{W}, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}=\frac{p\cdot q}{W},$$
$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}=\frac{p\cdot q}{W}, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}=1+\frac{1+|q|^2}{W},$$

及

$$J=\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}=2+\frac{2+|p|^2+|q|^2}{W}>0.$$

于是变换(4.13) 存在着局部逆变换 $(\xi_1, \xi_2)\to(x_1, x_2)$，再令$x_k=f_k(x_1, x_2)$，$k=3, \cdots n$，就可以用参数$\xi_1$，$\xi_2$来表示曲面了。但是

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}=\frac{w+1+|q|^2}{Jw}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}=-\frac{p\cdot q}{Jw},$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_1}=\frac{w+1+|q|^2}{Jw}p_k-\frac{p\cdot q}{Jw}q_k, \quad k=3, \cdots, n;$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}=-\frac{p\cdot q}{Jw}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}=\frac{w+1+|p|^2}{Jw},$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}=\frac{w+1+|p|^2}{Jw}q_k-\frac{p\cdot q}{w}p_k, \quad k=3, \cdots, n。$$

由此可见，关于参数ξ_1，ξ_2有

$$g_{11}=g_{22}=\left|\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right|^2=\left|\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right|^2=\frac{w}{J}$$

$$=\frac{w^2}{2w+2+|p|^2+|q|^2}; \tag{4.14}$$

$$g_{12}=\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi_2}=0,$$

因此ξ_1，ξ_2是等温坐标。

推论 设$x_k=f_k(x_1, x_2)$ $k=3, \cdots, n$ 确定了一个非参数极小曲面，则 f_k 是 x_1，x_2 的实解析函数。

证明：在每点的邻域内可引进映射 (4.13)，于是使曲面具有局部等温参数ξ_1与ξ_2。由引理 4.2 知 x_1，x_2 是调和函数，因此它们是 ξ_1，ξ_2 的实解析函数。于是逆映射 x_1，$x_2\to\xi_1$，ξ_2也是实解析函数。但是每一个x_k是ξ_1，ξ_2的调和函数，因此也是x_1，x_2的实解析函数。

特别要注意的是方程（2.8）的每一组解显然也是解析函数、在 $n=3$ 时这类问题的基本理论已由 Müntz〔1〕和 Radó〔1〕得到，他们设想以映射 $\xi_1=x_1$，$\xi_2=G(x_1, x_2)$ 代替映射（4.13）。因为这是一个较为简单的映射而由它同样也能得到等温坐标。此外，在下一节将要看到，由 Nitsche〔1〕引进的映射（4.13）在$n=3$时还有另外一些特别有用的性质。

下面用一个简单的引理以结束这一节。

引理 4.5 设曲面S是由 $X(u)$ 确定的，其中 u_1，u_2 是等温参数，$\widetilde{S}$ 是由微分同胚$u(\widetilde{u})$将S再参数化所得的曲面，则$\widetilde{u}_1$，$\widetilde{u}_2$ 为等温参数的充要条件是映射 $u(\widetilde{u})$ 或者是共形映射或者是反共形映射。

证明： 因为 u_1，u_2 是等温参数，所以 $g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$，並且由（1.8）式可知$\widetilde{G}=\lambda^2U^TU$，因此$\widetilde{u}_1$，$\widetilde{u}_2$ 是等温参数 $\Longleftrightarrow \widetilde{g}_{ij}=\widetilde{\lambda}^2\delta_{ij} \Longleftrightarrow (\widetilde{\lambda}/\lambda)U$ 是正交矩阵$\Longleftrightarrow u(\widetilde{u})$是共形映射或反共形映射。

§5 Bernstein 定理

本节将证明与 Bernstein 定理有关的几个结果，尽管 Bernstein 定理研究的是整体性质而不是局部性质，但是基于以下两点原因使我们仍然要在对大范围曲面作一般研究以前引进它：其一是因为定理的证明只要求有一个纯初等的论证；其二是因为 Bernstein 定理能为以后讨论的一些结论有所启发。

先证明一些简单的引理：

引理 5.1 已知函数 $E(x_1, x_2)\in C^2$ 级是定义在凸域D内並假设 Hessian 矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

是正定的，定义一个映射：

$$(x_1 x_2)\longrightarrow(u_1, u_2), \quad 其中 u_i=\frac{\partial E}{\partial x_i} \tag{5.1}$$

若X，Y是D中两个不同的点，它们在映射（5.1）下的象点为U，V。则向量$y-x$与$v-u$必满足方程：

$$(v-u)\cdot(y-x)>0 \tag{5.2}$$

证明：令 $G(t)=E(ty+(1-t)x)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$G'(t)=\sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{\partial E}{\partial x_i}(ty+(1-t)x)\right\}(y_i-x_i),$$

並且

$$G''(t)=\sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}(ty+(1-t)x)\right]$$

$$\times(y_i-x_i)(y_j-x_j)>0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

因此 $G'(1)>G'(0)$ 或 $\Sigma V_i(y_i-x_i)>\Sigma u_i(y_i-x_i)$，这就证明了（5.2）式成立。

引理 5.2 （Lewy[1]）若映射

$$(x_1, x_2)\longrightarrow(\xi_1, \xi_2) \tag{5.3}$$

是在引理5.1假设下根据 $\xi_i(x_1, x_2)=x_i+u_i(x_1, x_2)$ 定义的，其中 $u_i(x_1, x_2)$ 如（5.1）所定义。则对D中任意两

个不同点x与y，它们的象点ξ和η必须满足

$$(\eta-\xi)(y-x)>|y-x|^2. \tag{5.4}$$

证明：因为$\eta-\xi=(y-x)+(v-u)$，于是利用（5.2）式即可证得上式。

推论 在上述引理相同的假设下，则以下不等式成立。

$$|\eta-\xi|>|y-x| \tag{5.5}$$

证明：根据柯西—许瓦尔兹（Cauchy—Schwary）不等式，

$$|(\eta-\xi)\cdot(y-x)|\leqslant|\eta-\xi||y-x|,$$

把它用于（5.4）即证得（5.5）式成立。

引理 5.3 利用前面几个引理的记法，再设D是圆盘$x_1^2+x_2^2<R^2$，则映射（5.3）是区域D到区域Δ的微分同胚，Δ为含有以ξ(0)为圆心，R为半径的圆之区域。

证明：因为$E(x_1,\ x_2)\in C^2$级，所以映射（5.3）是连续可微映射。若$x(t)$是D内一条可微曲线，它在映射(5.3)下的象为$\xi(t)$，则由（5.5）式可见。$|\xi'(t)|>|x'(t)|$。因此，映射（5.3）的雅可比行列式处处大于1，于是映射（5.3）是局部微分同胚的，而且由（5.5）式可知，映射(5.3)是一对一的映射，所以也是到域Δ上的整体微分同胚。下面要证明Δ必含有使得$|\xi-\xi(0)|<R$成立的所有点。若Δ是整个平面，此结论显然成立。否则，在Δ的余集里必存在一点ξ，它与ξ(0)间的距离最短，设$\xi^{(k)}$是Δ内趋于ξ的一个点列，$x^{(k)}$是在D内的相应点列，那么$x^{(k)}$的任一聚点都不会在D内。否则，因为此聚点的象点是ξ，这就与ξ不在区域Δ内矛盾了。于是当$k\to\infty$时，$|x^k|\to R$而且根据

(5.5) 式可知$|\xi^{(k)}-\xi(0)|>|x^{(k)}|$，由此可见$|\xi-\xi(0)|\geqslant R$。引理证毕。

引理 5.4 设 $f(x_1, x_2)$ 是极小曲面方程 (3.10) 当 $x_1^2+x_2^2<R^2$时的解，若仍利用记号 (3.8) 及 (4.12)，则由 (4.13) 式所定义的映射 $(x_1, x_2)\to(\xi_1, \xi_2)$ 是一个到域Δ上的微分同胚，Δ为包含以$\xi(0)$点为中心R为半径的圆的区域。

证明： 由方程 (4.12) 可见，在圆盘 $x_1^2+x_2^2<R^2$ 内存在着函数$E(x_1, x_2)$，它满足

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}=F, \qquad \frac{\partial E}{\partial x_2}=G \tag{5.6}$$

则$E(x_1, x_2)\in C^2$级，而且由 (3.12)、(3.13) 及 (4.12) 可知

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}=\frac{1+|p|^2}{w}>0,$$

$$\det\frac{\partial^2 E}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial(F, G)}{\partial(x_i, x_j)}=1,$$

所以函数 $E(x_1, x_2)$ 有正定的 Hessian 矩阵，于是就可利用引理5.1—→引理5.3。但是根据（5.6）又知，若在映射 (5.3) 中取函数$u(x_1, x_2)$为$E(x_1, x_2)$则它恰好就是映射 (4.13) 。因此，由引理5.3可立即证得引理5.4。

引理 5.5 设在区域D内 $f(x_1, x_2)\in C^1$ 级，f 是一个实值函数，则曲面 s： $x_3=f(x_1, x_2)$ 为平面的充要条件是存在一个非奇异的线性变换$(u_1, u_2)\to(x_1, x_2)$ 使得u_1, u_2是S的等温参数。

证明： 假定u_1，u_2是曲面S的等温参数。那么，我们会

看到，由于假设x_1，x_2是u_1，u_2的线性函数，所以在用公式（4.6）引进函数$\phi_k(\zeta)$（$k=1, 2, 3$)时，可得ϕ_1、ϕ_2必为常数。而又由公式（4.9）知ϕ_3也必须为常数，这就意味着x_3关于u_1、u_2的斜率为常数，因此，关于x_1，x_2的斜率也为常数，所以

$$f(x_1, x_2)=Ax_1+Bx_2+C$$

反之，若函数$f(x_1, x_2)$具有上述这种形式，则容易写出一个能得出等温坐标的明显的线性变换。例如，可令：

$$x_1=\lambda Au_1+Bu_2, \quad x_2=\lambda Bu_1-Au_2,$$

式中 $\lambda^2=\dfrac{1}{1+A^2+B^2}$.

定理 5.1 （Osserman[7]）设$f(x_1, x_2)$是极小曲面方程（2.8）在整个x_1，x_2平面内的解，则存在着非奇异线性变换：

$$\begin{aligned} x_1&=u_1, \\ x_2&=au_1+bu_2, \qquad b>0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

使得u_1，u_2是由$x_k=f_k(x_1, x_2)$，$k=3, \cdots, n$所定义的曲面S的（整体）等温参数。

推论 1 （Bernstein[3]）当$n=3$时，在整个x_1x_2平面内极小曲面方程只有平凡解，而且f是x_1，x_2的线性函数。

推论 2 在全平面内，方程（2.8）的有界解必是常数（对于任意的n）.

推论 3 设$f(x_1, x_2)$是方程（2.8）在全平面内的解，由

$$x_k=\widetilde{f}_k(u_1,\ u_2),\qquad k=3,\ \cdots,\ n \tag{5.8}$$

定义的曲面$\widetilde{S}$是通过把曲面S用（5.7）所给的等温参数来表示后而得到的，则函数

$$\widetilde{\phi}_k=\frac{\partial\widetilde{f}_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial\widetilde{f}_k}{\partial u_2},\qquad k=3,\ \cdots,\ n \tag{5.9}$$

在整个u_1，u_2平面内是u_1+iu_2的解析函数，並满足

$$\sum_{k=3}^{n}\widetilde{\phi}_k^2=-1-C^2,\ \ c=a-ib. \tag{5.10}$$

反之，已知任一复常数$c=a-ib$，其中$b>0$及某些满足条件（5.10）的u_1+iu_2的整函数$\widetilde{\phi}_3$，…，$\widetilde{\phi}_n$，则可利用方程（5.9）确定调和函数$\widetilde{f}_k(u_1,\ u_2)$。然后，再从公式（5.7）把$u_1$，$u_2$作为$x_1$，$x_2$的函数代入方程（5.8），于是就能得到极小曲面方程（2.8）的一个定义在整个x_1，x_2平面上的解。

推论1的证明：此推论可由定理5.1及引理5.5直接证得。

推论2的证明：由引理4.2可知，每个x_k，$k=3$，…，n在整个u_1，u_2平面上均为u_1，u_2的有界调和函数，因此是常数。

推论3的证明：根据（5.7）並利用以下事实

$$\widetilde{\phi}_1=\frac{\partial x_1}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_1}{\partial u_2}\equiv 1,\ \ \widetilde{\phi}_2=\frac{\partial x_2}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_2}{\partial u_2}\equiv a-ib,$$

于是可知此推论是引理4.3的直接结论。

定理的证明：我们仍然利用映射（4.13），只不过现在

假设它定义在整个x_1，x_2平面内，根据引理5.4，此映射是由x_1，x_2平面到整个ξ_1，ξ_2平面的微分同胚。从（4.14)可知，在由$x_k=f_k(x_1, x_2)$，$k=3, \cdots, n$确定的曲面S上，(ξ_1, ξ_2)是等温参数，根据引理4.3，函数

$$\phi_k(\zeta)=\frac{\partial x_k}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} \qquad k=1, \cdots, n$$

是ζ的解析函数。注意恒等式

$$I_m\{\overline{\phi_1}, \phi_2\}=-\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \xi_2)},$$

由于右边的雅可比行列式始终为正，所以首先可得到φ_1，φ_2处处不为零，进而可得

$$I_m\{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\}=\frac{1}{|\varphi_1|^2}I_m\{\overline{\varphi_1}, \varphi_2\}<0。$$

因为φ_2/φ_1为整个ζ平面的解析函数並且其虚部为负值，因此必为常数，可令

$$\varphi_2=c\varphi_1, \qquad c=a-ib, \qquad b>0。 \tag{5.11}$$

比较方程（5.11）的实部和虚部得

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}&=a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}-b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2},\\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}&=b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}+a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}。\end{aligned} \tag{5.12}$$

若再引进变换（5.7），则方程（5.12）变成以下形式

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}=\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}{}^{*}=-\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2};$$

译者注：此处原书为$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}$。

即柯西——黎曼（Cauchy-Riemann）方程，它表明 u_1+iu_2 是 $\xi_1+i\xi_2$ 的复解析函数，但是根据引理4.5可知这就说明（u_1，u_2）也是等温参数，定理证毕。

要注意，当$n=3$时，由公式（5.6）定义的函数$E(x_1, x_2)$是由E。Heinz 引进的。（见 Jörgens〔1〕，p.133）但是把此函数用到 Lewy 引理中的映射（5.3）上，从而使 Bernstein 定理有较简单的证明却要归功于 Nitsche〔1，2〕。推论3的作用在于它对于极小曲面方程(2.8)在整个x_1，x_2平面上的所有解提供了一种表示的方法，我们比较感兴趣的是深入地研究 $n=4$ 的情况。正如在第2节末已看到的，除有线性平凡解f_k以外，还有以下形式的解：

$$f_3+if_4=g(z), \qquad z=x_1+ix_2, \tag{5.13}$$

式中 g 是 z 的解析函数。对任意整函数$g(z)$，方程（5.13）在整个 x_1，x_2 平面内确定了极小曲面方程的一个解。若令

$$f_3-if_4=g(z) \tag{5.14}$$

也有同样结论。根据定理5.1，对每个整体解 $f_3(x_1, x_2)$，$f_4(x_1, x_2)$相应地有一个变换（5.7）及满足

$$\tilde{\phi}_3^2+\tilde{\phi}_4^2\equiv-d, \qquad d=1+c^2 \tag{5.15}$$

的整函数$\tilde{\phi}_3(w)$，$\tilde{\phi}_4(w)$，其中 $w=u_1+iu_2$ 。下面分两种情况讨论：首先，若 $c=\pm i$，则方程（5.10）变成

$$\tilde{\phi}_3^2+\tilde{\phi}_4^2=0; \qquad a=0, \ b=\pm 1, \tag{5.16}$$

于是变换（5.7）不是恒等变换就是反射变换，既 $w=z$ 或 $w=\bar{z}$。从方程(5.16)可推得$\tilde{\phi}_4=\pm i\tilde{\phi}_3$，它等价于$f_3+if_4$

是z和$\bar{z}$的解析函数。所以，$c=\pm i$这种情况恰好对应了特殊解（5.13）和（5.14），第二种情况：$c\neq\pm i$，此时可把方程（5.5）写成

$$(\tilde{\phi}_3+i\tilde{\phi}_4)(\tilde{\phi}_3-i\tilde{\phi}_4)=-d \qquad d\neq 0 \qquad (5.17)$$

的形式，因此等式左边的每个因子都不能为零。特别因为函数$\tilde{\phi}_3-i\tilde{\phi}_4$是不恒为零的整函数，因此关于某个整函数$H(w)$它可写成以下形式

$$\tilde{\phi}_3-i\tilde{\phi}_4=e^{H(w)},$$

而根据（5.17）可得

$$\tilde{\phi}_3+i\tilde{\phi}_4=-de^{-H(w)}$$

综合这两个方程可得

$$\tilde{\phi}_3=\frac{1}{2}(e^{H(w)}-de^{-H(w)}),$$

$$\tilde{\phi}_4=\frac{i}{2}(e^{H(w)}+de^{-H(w)}). \qquad (5.18)$$

这样就确切地给出了当$n=4$时，在整个x_1，x_2平面上都有意义的极小曲面方程的所有解。这些解可取（5.13）或（5.14）那种特殊形式，或者通过取形如（5.7）的任意线性变换並把常数$d=1+(a-ib)^2$与任意整函数$H(w)$一起代入（5.18）而得到。

下面举一个简单的例子。在（5.7）式中取$a=0$，$b=2$及$H(w)=w$，则

$$x_1=u_1, \qquad x_2=2u_2, \qquad \tilde{\phi}_3=\frac{1}{2}(e^w-3e^{-w}),$$

$$\widetilde{\phi}_4 = \frac{i}{2}(e^w + 3e^{-w}),$$

$$x_3 = \mathrm{Re}\int \widetilde{\phi}_3 dw = \frac{1}{2}\cos u_2 (e^{u_1} - 3e^{-u_1}),$$

$$x_4 = \mathrm{Re}\int \widetilde{\phi}_4 dw = -\frac{1}{2}\sin u_2 (e^{u_1} - 3e^{-u_1}).$$

这样就得到了非参数式曲面

$$x_3 = \frac{1}{2}\cos\frac{x_2}{2}(e^{x_1} - 3e^{-x_1}),$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}\sin\frac{x_2}{2}(e^{x_1} - 3e^{-x_1}). \qquad (5.19)$$

通过直接计算可以证明，它是 $n=4$ 时极小曲面方程的一个整体解，随着今后进行更一般的研究，这种曲面是一个很有用的例子。*见（p.124）

§6 参数曲面：整体理论

在前一节里，藉助两个坐标 x_1，x_2 使得整个曲面有了再参数化。基于这种特殊情况，使我们能得出一些整体结果。在一般情况下，曲面仅仅被一些邻域所覆盖着，其中每个邻域都能按照第 1 节所研究的那种方式再参数化。因此，为研究整个曲面，首先要给出一些严格的定义。先回顾一下有关可微流形的某些概念。

定义 一个 n 维流形是一个豪斯道夫（Hausdorff）空

* 见附录3，2。

间，且每点有一邻域同胚于E^n的一个区域。

n维流形的图册A是一组三元集（R_α，O_α，F_α），其中R_α是E^n内的域，O_α是M上的开集，F_α是R_α到O_α上的同胚映射，而且所有O_α的并集等于M。每一个三元集称作一个图册。

如果流形M具有一个图册，其每个变换$F_\alpha^{-1}\circ F_\beta$都保持一个定向，则称M是可定向的流形。M的一个定向也就是具有这种性质的图册的一个选择。

M上的C^r级结构是一个图册，关于这个图册，$F_\alpha^{-1}\circ F_\beta\in C^r$级，M上的共形结构也是一个图册，$F_\alpha^{-1}\circ F_\beta$关于这个图册是一个共形映射。

注：这里的“共形”指的是“严格共形”。因此，M上的共形结构自然规定了M的一个定向。

设M是一个有C^r级结构A的n维流形，$\widetilde{M}$是一个有C^r级结构$\widetilde{A}$的m维流形。映射f：$M\longrightarrow\widetilde{M}$。如果对于每个映射$\widetilde{F}_\beta^{-1}\circ f\circ F_\alpha\in C^p$级，（$p\leqslant r$），则称$f$是$c^p$级映射，用$f\in C^p$级，$p\leqslant r$来表示。

特别要注意，在E^n内有一个典型的C^r级结构（r为任意数），它的图册A是由一个简单的三元集：$R_\alpha=O_\alpha=E^n$、F_α为恒等映射组成的。

定义 E^n内的C^r级曲面S是一个2维流形M，它具有C^r级结构及C^r级映射$X(p)$：$M\longrightarrow E^n$

设S是E^n内的C^r级曲面，A是相伴于2维流形M上的C^r级结构，R_α是u平面内的区域，R_β是$\widetilde{u}$平面内的区域，则F_α与映射$x(p)$的复合映射是映射$x(u)$：$R_\alpha\longrightarrow E^n$。如此定义的曲面就是在第1节中所给出的局部曲面。相应的映射

$x(\tilde{u})$: $R_\beta \longrightarrow E^n$就确定了一个由 $x(u)$通过参数变换$u(\tilde{u}) = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ 而得到的局部曲面。因此曲面的所有与参数无关的局部性质，显然对于按上述定义所给的整体曲面也是具备的。特别是，若用（p_0，$x(p_0)$）表示曲面 S 上的点，其中 p_0为流形M的点，于是同样可论述曲面S在点(p_0，$x(p_0)$)是正则的、曲面S在点（x_0，$x(p_0)$）的切平面或平均曲率向量等等。

为简便起见，可以用流形M的整体性质来定义曲面 S 的整体性质。因此，若流形M是可定向的则称曲面 S 是可定向的；S 的一个定向也就是M的一个定向。类似地还可定义曲面 S的拓扑性质，例如：S 是紧致的、连通的、单连通的等等。今后将规定所有的曲面都是连通且可定向的，並在本书中都将遵循这一规定。显然，如果曲面不连通，则可分别研究每个连通分支，它也是一个曲面。至于不可定向曲面也是令人感兴趣的，特别是其中的不可定向极小曲面。在分析上出现的这些曲面是通过一些明显的公式而得到的初等曲面，例如：Henneberg 曲面（见 Darboux〔1〕，§226）。而从物理上来看，这种曲面就是周界为简单闭曲线的莫比乌斯（Möbius）带形皂膜曲面(见Courant〔2〕第四章)。另外，由初等拓扑可得以下结论：对于每一个不可定向的C^r级流形M相应地有一个定向的 C^r 级流形$\tilde{M}$及一个 C^r 级映射 g：$\tilde{M} \longrightarrow M$，使得 g 是局部微分同胚，而且M中每个点的逆象为$\tilde{M}$ 的两个点。于是对于每一个不可定向曲面 $X(p)$：$M \longrightarrow E^n$ 就对应了一个定向曲面 $X(\tilde{p})$：$\tilde{M} \longrightarrow E^n$，其中 $X(\tilde{p}) = X(g(\tilde{p}))$ 。並且，不可定向曲面的许多性质可以直接通

过定向曲面的相应性质得到。特别是，本概论只介绍不可定向极小曲面的这类性质。

定义 E^n内一个正则C^2级曲面，若在每一点它的平均曲率向量为零，则称它为极小曲面。

引理 6.1 设S是由E^n内的映射$X(p)$：$M\longrightarrow E^n$所定义的正则积小曲面，则S导出了M上的一个共形结构。

证明： 按照前面的约定，假设S为可定向曲面，A是M的一个定向图册，$\widetilde{A}$是所有三元集（$\widetilde{R}_\alpha$，$\widetilde{O}_\alpha$，$\widetilde{F}_\alpha$）的集合，其中$\widetilde{R}_\alpha$是平面域，$\widetilde{O}_\alpha$是M上的开集，$\widetilde{F}_\alpha$是$\widetilde{R}_\alpha$到$\widetilde{O}_\alpha$的同胚映射，$\widetilde{F}_\beta^{-1}\circ\widetilde{F}_\alpha$保持同一定向，并且$X\circ\widetilde{F}_\alpha$：$\widetilde{R}_\alpha\longrightarrow E^n$确定了一个具有等温参数的局部曲面。

根据引理4.4，$\widetilde{O}_\alpha$的并集等于M，所以$\widetilde{A}$也是M的一个图册，再根据引理4.5可知，每一个$\widetilde{F}_\alpha^{-1}\circ\widetilde{F}_\beta$都是共形的。因此$\widetilde{A}$就确定了M的一个共形结构。

要注意，一般讲，按这种方法在曲面上引进共形结构是极容易实现的。因为曲面S的低阶可微性这个条件就能保证局部等温参数的存在，然而在一般情况下局部等温参数存在性的证明却是很困难的。

以下研究几个与共形结构有关的基本概念。首先要注意：若M有共形结构，那么就可以给所有那些在共形映射下不变的概念下定义。特别是，可以研究流形M上的调和及次调和函数以及由这种流形M到另一个流形$\widetilde{M}$的（复）解析映射。流形M上的亚纯函数是M到黎曼球的复解析映射。而在E^3内，可以把具有共形结构的单位球$|x|=1$定义为黎曼球，这个共形结构是由一对映射：

$$F_1: \quad X=\left(\frac{2u_1}{|w|^2+1}, \frac{2u_2}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right),$$

$$w=u_1+\varepsilon u_2 \tag{6.1}$$

及

$$F_2: \quad X=\left(\frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{1-|\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2+1}\right),$$

$$\tilde{w}=\tilde{u}_1+i\tilde{u}_2 \tag{6.2}$$

确定的。映射 F_1 称作由点（0，0，1）出发的球极平面射影，它的象是除这个点以外的整个球。显然，映射 F_1^{-1} 为

$$F_1^{-1}: \quad W=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}, \tag{6.3}$$

$F_1^{-1}oF_2$: $W=\frac{1}{\tilde{W}}$ 就是由 $0<|\tilde{W}|<\infty$ 到 $0<|W|<\infty$ 上的共形映射。

定义：设M是一个二维流形，它具有由图册 $A=\{R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha\}$ 定义的共形结构，则 E^n 内的广义极小曲面 S 是一个非常值映射 $X(p)$：$M\longrightarrow E^n$，它使得每个坐标函数 $X_k(p)$ 都是M上的调和函数，而且

$$\sum\phi_k^2(\zeta)\equiv 0,$$

此处令

$$h_k(\zeta)=X_k(F_\alpha(\zeta)), \quad \phi_k(\zeta)=\frac{\partial h_k}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial h_k}{\partial \xi_2},$$

$$\zeta=\xi_1+i\xi_2。 \tag{6.4}$$

（α 为任意数）

关于这个定义，须进一步作以下说明：

首先，若S为正则极小曲面，则利用由引理 6.1 所定义的那种共形结构並根据引理 4.3 可知，S同时也是一个广义极小曲面。因此广义极小曲面的理论也包括了正则极小曲面的理论。另一方面，如果S是广义极小曲面，那么因为$x(p)$为非常值映射，所以至少有一个函数 $x_k(p)$是非常值函数。这就表明相应的解析函数 $\phi_k(\zeta)$最多可能有孤立的零点，因此方程

$$\sum_{k=1}^{n}|\phi_k^2(\zeta)|=0 \tag{6.5}$$

最多在孤立点成立。那么，再根据引理 4.3，若把曲面S上这样的孤立点去掉，剩下的曲面就是正则极小曲面了。使方程（6.5）成立的这些点称作曲面的枝点。如果研究当 $n=2$ 时的广义极小曲面的定义就会发现：x_1+ix_2 或者 x_1-ix_2 是非常值解析函数 $f(\zeta)$，使（6.5）成立的点也就是在经典意义下，逆映射的枝点，是使得 $f'(\xi)=0$ 的点，当 n 为任意数时，正则极小曲面与广义极小曲面之间的区别在于是否可能有孤立的枝点，在用这种方法去展开对这类曲面研究时恰好有正好相反的两种观点，一方面人们很想证明一些适合于正则极小曲面的定理。但是，到目前为止所证得的定理却只适用于广义极小曲面*，经典的Plateau问题就是一个最好的例子。另一方面，有许多定理並不受枝点存在性的影响，因此可以对广义极小曲面证明这些定理。下面举一个例子。

引理 6.2 广义极小曲面不可能是紧致曲面。

证明： 设S是由映射 $x(p)$：$M\to E^n$ 定义的广义极小曲

---

* 见附录3，1。

面。那么，每个坐标函数 $x_k(p)$ 是M上的调和函数。若M为紧致流形，则 $x_k(p)$ 就能达到其最大值，因此它是常数，这就与已知 $x(p)$ 是非常数矛盾。

一般讲，在进行关于广义极小曲面的研究时，要注意枝点本身的精确性质确实可作为一个研究课题。有关这方面的研究结果参见Bers〔2〕及 Chen〔1〕。

为简便起见，作以下约定：除了以下两种特殊情况，我们将删去形容词"广义的"、"正则的"，而把它们简单地统称为"极小曲面"。第一种情况，若没有适当地限制，则结论就会不正确；第二种情况就是我们想强调所讨论的曲面是"正则的"或"广义的"这个事实。

下面简单地讨论一下黎曼流形：

定义：设M是一个具有由图册 $A=\{R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha\}$ 确定的 C^r 级结构的微分流形。所谓M上的一个黎曼结构或者说一个 C^q 级黎曼度量是指矩阵 G_α 的集合，而 G_α 的元素是 O_α 上的 C^q 级函数，其中 $0\leqslant q\leqslant r-1$ 並且在每一点矩阵 G_α 是正定的，另一方面若对任意的 α，β 都能使映射 $u(\tilde{u})=F^{-1}oF_\beta$ 为确定的映射时，关系式

$$G_\beta=U^TG_\alpha U \tag{6.6}$$

必须成立，式中U是变换 $F_\alpha^{-1}oF_\beta$ 的雅可比矩阵。

M上的一条可微曲线就是实直线上的区间〔a, b〕到M内的一个可微映射。

曲线 $p(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$ 关于已知黎曼度量的长度由

$$\int_a^b h(t)dt \tag{6.7}$$

来计算。在这里，对每个 $t_0(a\leqslant t_0\leqslant b)$，可选一个 O_α 使得

$p(t_0)\in O_\alpha$，并且当 t 充分接近t_0时，设

$$h(t)=\left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p(t))u_i'(t)u_j'(t)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$G_\alpha=(g_{ij}) \tag{6.8}$$

式中u_1，u_2为R_α内的坐标。根据（6.6）可知$h(t)$的定义与O_α的选择无关。

已知由非负实数到M内的连续映射 $p(t)$，若对M的每个紧致子集 Q，存在一个实数 t_0，使得当 $t>t_0$ 时 $p(t)\overline{\in}Q$，则称$p(t)$是M的发散路径。

若发散路径是可微的，则定义它的长为

$$\int_0^\infty h(t)dt, \tag{6.9}$$

式中的 $h(t)$ 仍按（6.8）式确定。

定义：对于流形M上的每条可微的发散路径，如果积分（6.9）是发散的，则称 M 关于已知的黎曼度量为完备流形。

1931年 Hopf 和 Rinow〔1〕首先开始研究完备黎曼流形。自那时起，这个课题就开始被广泛地研究起来。在全面地研究具有黎曼度量的流形时，众所公认“完备性”这一概念是最有用的。本概观的宗旨之一就是要详细地研究完备极小曲面的结构。首先作以下几点论述：

假设在E^n内由映射$x(p)$：$M\longrightarrow E^n$确定了一个C^r级曲面，则此映射在流形M上导入了一个黎曼结构。对每个α，令$x(u)=x(F_\alpha(u))$，并定义矩阵G_α的元素为

$$g_{ij}=\frac{\partial x}{\partial u_i}\ \frac{\partial x}{\partial u_j} \tag{6.10}$$

于是看出方程（6.6）实际是方程（1.8）的推论。在S的每个正则点处，矩阵G_α是正定的。于是对于E^n内的每个正则曲面S就对应了一个二维黎曼流形M。如果M关于由(6.10)所确定的黎曼度量是完备的流形，则称S为完备曲面。

若S是广义极小曲面，则存在着一些孤立点。在这些孤立点处，（6.10）式所给定的矩阵是非正定矩阵，而由（6.8）所定义的函数$h(t)$却仍然是非负函数，它不依赖于α的选取。如果对每一条发散路径，积分（6.9）发散，那么可认为S是完备曲面。

最后再回忆一下有关二维流形理论的某些基本事实以结束本节。

首先，每个二维流形M有一个万有覆盖曲面，它由单连通二维流形$\widehat{M}$及映射π：$\widehat{M}\longrightarrow M$组成。映射$\pi$有以下性质：M的每一点有一个邻域V，使得映射$\pi$在每个$\pi^{-1}(v)$的分量上的限制是一个到V上的同胚。更因为映射$\pi$是局部同胚，所以根据M上的结构是$C^r$级的、共形的、黎曼的等等就可诱导出$\widehat{M}$上相应的结构。不难证明：M关于已知黎曼度量为完备流形的充要条件是$\widehat{M}$关于诱导的黎曼度量为完备流形。

其次，假设S是由映射$x(p)$：$M\longrightarrow E^n$确定的极小曲面，那么同时也能得到一个单连通极小曲面$\widehat{S}$，称它为S的万有覆盖曲面。它是通过复合映射$X(\pi(\widehat{p}))$：$\widehat{M}\longrightarrow E^n$确定的。可见，$\widehat{S}$是正则曲面当且仅当S是正则曲面，$\widehat{S}$是完备曲面的充要条件为S是完备曲面。因此，关于极小曲面的许多问题只要通过研究单连通极小曲面就可解决。因为在单

连通极小曲面的情况下可简化为以下重要引理：

引理 6.3 每个单连通极小曲面 S 有一个以 $x(\zeta): D \longrightarrow E^n$ 形式的再参数化。其中D或者是单位圆盘 $|\zeta|<1$ 或者是整个 ζ 平面。

证明： 设 S 是由 $x(p): M \longrightarrow E^n$ 定义的曲面，由引理 6.2可知M为非紧致流形。又由 Koebe 单值化定理（例如，见 Ahlfors 及 Sario〔1〕Ⅱ，11，G）可知M共形地等价于单位圆盘或平面。于是，再通过复合映射：$D \longrightarrow M \longrightarrow E^n$ 就能得出定理的结论。

最后，再介绍几个用于区分引理 6.3 中单位圆盘或整个平面的术语。

如果在有共形结构的二维流形M上存在一个非常数的、负的次调和函数，则称M为双曲型流形，否则就称作抛物型流形。函数 $Re\{\zeta-1\}$ 表明单位圆 $|\zeta|-1$ 是双曲型的。不难证明整个平面是抛物型的。

曲面的共形结构、拓扑结构及黎曼结构之间都有许多相互关系。而且以后我们还会看到，极小曲面的每种结构对于研究曲面几何性质都是很有用的。

§7 有边界的极小曲面

这一节，要研究有边界极小曲面的一些性质。鉴于引言所提到的一些理由，我们对 Plateau 问题就不再作深入仔细地讨论了，但並不排斥在本文中简单地研究有关这方面的问题。

定义： 若流形 M 上的点列 P_k 在M上没有聚点，则称它

为发散点列。

若 S 为映射 $x(p)$：$M \longrightarrow E^n$ 确定的极小曲面，对于M上的所有发散点列P_k，形如 $\lim x(p_k)$ 的点集就是 S 的边界值。

注：若M为平面内的有界域，则M上的序列P_k为发散序列的充要条件是它趋于边界。如果把 $x(p)$ 扩充为闭包 $\overline{M}$的连续映射，则 S 的边界值就是M的边界的象。

引理 7.1 每个极小曲面都在它的边界值的凸包内。

证明：设 S 为由 $x(p)$：$M \longrightarrow E^n$ 确定的极小曲面，假定它的边界值包含于半空间

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - b \leqslant 0 .$$

因为函数 $h(p)=L(x(p))$ 为M上的调和函数，所以由最大值原理可知，在M上 $h(p)\leqslant 0$。即，若令 $\sup h(p)=m$，则可选取一些点p_k，使 $h(p_k) \longrightarrow m$，如果 p_k在M内有聚点则可假定函数 $h(p)$ 在这点达到最大值，因此此函数是常数。但是，若选一个任意的发散序列q_k，则对任意的k必有 $h(q_k)=m$ 成立，並且 $\overline{\lim} h(q_k)\leqslant 0$，因此$m\leqslant 0$。而另一方面，如果$P_k$是发散的，则还可以得出 $m=\lim h(p_k)\leqslant 0$。也就是说在M上 $L(x(p))\leqslant 0$，所以曲面 S 在半空间 $L(x)\leqslant 0$ 内。但是边界值的凸包是包含它们的一切半空间的交，因此S在这些交集内。

引理 7.2 设在平面域D内，$x(u)$确定了以 u 为等温参数的极小曲面，则沿着D内任意线段，$x(u)$ 不是常数。

证明：因为在一个正则点的邻域内，$x(u)$ 是一一映射，同时因为即使有枝点也是孤立点。这就能立即得出结

论。

引理 7.3 （反射原理）设 $x(u)$ 是定义在半圆盘 D：$|u|<\varepsilon$，$u_2>0$ 内且有等温参数的极小曲面。假定在空间内存在一条直线L，使得当 $u_2 \longrightarrow 0$ 时 $x(u) \longrightarrow L$。则 $x(u)$ 可以扩充为定义在整个圆盘 $|u|<\varepsilon$ 内的广义极小曲面並且被扩充的曲面是关于L对称的。

证明：通过 E^n 的旋转变换总可假定直线L的方程为 $x_k=0$，$k=1$，…，$n-1$。于是可以通过令 $x_k(u_1, 0)=0$，$x_k(u_1, u_2)=-x_k(u_1, -u_2)$ 来扩充函数 $x_k(u)$，$k=1$，…，$n-1$。根据调和函数的反射原理，这些被扩充的函数在整个圆盘内也是调和函数。因此，函数

$$\phi_k=\frac{\partial x_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \qquad k=1,\ \cdots,\ n-1$$

在整个圆盘内为解析函数，並且在实轴上是纯虚数。由方程

$$\phi_n^2=-\sum_{k=1}^{n-1}\phi_k^2$$

看到 ϕ_n^2 可连续地扩充到整个实轴，而且在实轴上有非负实数值。由此可见，ϕ_n 也能连续地扩充到整个实数轴並且具有实数值。通过积分又可知 x_n 也可连续地扩充到整个实轴，而且在实轴上 $\partial x_n/\partial u_2=0$。若在下半圆盘内令 $x_n(u_1, u_2)=x_n(u_1, -u_2)$ 则就能得到要证的结论。

引理 7.4 设 $x(u)$ 是定义在圆盘D内，具有等温参数的极小曲面，则沿圆盘D的任意边界弧，$x(u)$ 不可能趋于一个单点。

证明：如果 $x(u)$ 能趋于一个单点，那么经过预先给定的、由圆盘 D 到上半平面的共形映射后，就可以利用引理

7.3把曲面扩充定义到实轴的某条线段上去。于是在这个线段上，$x(u)$是常数。这与引理7.2矛盾。

下面介绍关于具有指定边界的极小曲面存在性的基本定理。*

定理 7.1 (Douglas〔1〕) 设Γ为E^n内任意一条约当(Jordan)曲线，则存在一个以Γ为边界的单连通广义极小曲面。

在此，我们只想叙述证明的要点，这个证明是由Courant〔1，2〕作了重要改进的。同时，在下面的论述过程也参照了Radó〔3〕，Lewy〔2〕和Garabedian〔1〕的著作中的一些见解。

我们首先要对结论作精确地叙述。采用以下记号：

D表示单位圆盘：$u_1^2+u_2^2<1$；

$\overline{D}$表示闭单位圆盘：$u_1^2+u_2^2\leqslant 1$；

C表示边界：$u_1^2+u_2^2=1$；

于是定理的结论可叙述为：存在着映射$x(u)$：$\overline{D}\longrightarrow E^n$，使得：

i）$x(u)$为闭单位圆盘$\overline{D}$上的连续映射；

ii）限制于单位圆盘D内，$x(u)$为极小曲面；

iii）限制于边界C上，$x(u)$为到曲线Γ上的同胚。

映射$x(u)$是通过狄里克雷(Dirichlet)积分的极小化方法得到的。D内每个C^1级映射$x(p)$的狄利克雷积分可记作

$$D(x)=\iint_D \sum_{k=1}^n\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2\right]du_1du_2$$

---

* 见附录3，1。

为选出一个适当的映射类，使得狄里克雷积分在此映射类中取到最小值。我们来研究边界圆C到曲线Γ上的单调映射，即若沿曲线C按正方向转一圈则映射的像点也沿曲线Γ按给定方向转一圈，允许映射将C的一些弧映射为Γ的一些单点。

给定约当曲线Γ，设映射类H为具有下述性质的映射$x(u)$：$\overline{D}\longrightarrow E^n$的全体：

a）$x(u)$在闭圆盘$\overline{D}$内为连续映射；

b）在圆盘D内$x(u)\in D^1$级；

c）$D(x)<\infty$；

d）限于边界C的$x(u)$是到曲线Γ上的单调映射。

H很可能是空集，但我们有以下断言：

1．若Γ为分段可微曲线（特别当Γ是多边形时）甚至只要Γ为可求长曲线，则H为非空集。

2．当H为非空集时，则存在着映射$y(u)\in H$，使得对于所有的$x(u)\in H$，均有$D(y)\leqslant D(x)$成立。

3．上述映射$y(u)$可作为满足本定理所述条件i）、ii）、iii）之解

现在概要介绍这些论断的证明。

1．若令S为曲线Γ上的弧长参数，L是它的全长並且$t=\frac{2\pi S}{L}$。那么，通过对每个坐标$x_k(e^{it})$应用泊松(Poisson)积分，可把映射$x(e^{2t})$：$C\longrightarrow\Gamma$扩充为集合H中的映射：$\overline{D}\longrightarrow E^n$。

2．设$d=\inf D(x)$，式中$x\in H$並且令$x^\nu(u)\in H$使得$d_\nu=D(x^\nu)\longrightarrow d$。对每个$\nu$，通过令$\widetilde{x}_k^\nu(u)$为D内与$x_k^\nu(u)$

有相同边界的调和函数来确定$\tilde{x}^{v}(u)$，则$\tilde{x}^{v}(u)\in H$。根据调和函数的性质去求具有已知边界值的狄利克雷积分的最小值，因而得$d\leqslant D(\tilde{x}^{v})\leqslant \tilde{D}(x^{v})$。现在固定边界圆C上的三个点和曲线Γ上的三个点並令$\hat{H}$是H的子集，在$\hat{H}$中的$x(u)$按给定的顺序把C上的三个点映射为Γ上的三个点。根据D的线性分式变换就能从每个$\tilde{x}^{v}(u)$得到一个$\hat{x}^{v}(u)\in\hat{H}$及$D(\hat{x}^{v})=D(\tilde{x}^{v})$，于是可证明一个基本引理：边界映射$\hat{x}^{v}$：$C\longrightarrow\Gamma$必须是高度连续的。因此就能找到$\hat{x}^{v}$的一个子序列，它在C上因而也在$\overline{D}$上一致收敛。其极限为满足$D(y)=d$的映射$y(u)\in\hat{H}$。

3．因为映射$y(u)$是D内调和函数的一致极限，因此在D内也是调和函数。根据变分法理论可证明，这样的映射必确定D内的一个广义极小曲面。因为边界对应是单调的，所以要使它不是一一对应的唯一方法是把整个边界弧映射成一个点。但是引理7.4已指出这是不可能的。于是映射$y(u)$必须满足（i）、（ii）、（iii）。问题也就解决了。

至于定理7.1最后一个结论的证明，Douglas证明了如果Γ是一条约当曲线则Γ能由一系列多边形逼近且相对应的一系列极小曲面将趋于一个满足条件i)、ii)、iii)的曲面。

注1 曲面S是单连通的这个限制，从某种观点来看，既不必要也不很自然。事实上如果我们用一段金属丝及肥皂液来构造物理学上的极小曲面则可发现，在很多情况下有较高亏格数和较高连通度的曲面，其中包括最简单的麦比乌斯（Möbius）带。为了进一步讨论这些理论，可以参考Douglas〔2〕的最新论文及Courant〔2〕的书。在这里只叙

述两个更显著的事实来说明可能复杂到什么程度。第一：存在可求长的约当曲线 Γ，有不可数个不同的极小曲面以 Γ 为边界（Lery〔1〕）。第二，存在可求长的约当曲线 Γ，由 Γ 围成的具有极小面积的曲面必须有无限连通度（Fleming〔1〕）。

2. 几年前，一个崭新的研究 Plateau 问题的途径已开始着手进行。人们试图在很一般的一类对象中找出面积的极小值以代替仅限于曲面的那些困难，然后再证明存在着达到极小值的对象，而事实上这对象就是曲面。

在 Reifenberg〔1〕的开创性工作中，他所研究的一类对象是在某种意义下有已知边界的紧致子集並且二维豪斯道夫测度是达到最小值的。这种方法有两个主要好处，其一，它能适用于较高维的子簇。在这种情况下，m 维豪斯道夫测度达到最小值。第二，在二维的情况下，我们得到的不只是广义的极小曲面，实际上还是一个正则极小曲面。“正则”这个结论是由 Reifenberg〔1，2，3〕得到的，特别是在他综合了〔1〕中 P.70定理 4 及〔3〕后面得出了这个结果。在 Federer 及 Fleming〔1〕方法的基础上，Fleming〔2〕证明了边界是一条可求长、定向约当曲线 Γ 的正则、定向极小曲面的存在性。关于这个问题也可参见 Almgren〔3〕的讨论。

3. 与定理7.1有关的悬而未解的主要问题之一是，是否存在一个边界是任意约当曲线 Γ 的正则单连通极小曲面*。实际上这是 Plateau 问题的最初提出方式，但是这个问题仍然没有解决。在下面的引理中，我们将提供一些关于定理7.1所构造的曲面必须为正则曲面的依据。

---

* 见附录3，1。

引理 7.5 （Radó[3]Ⅱ.7）设 $h(u_1, u_2)$ 是单位圆盘D内的非常数调和函数并且在闭域$\overline{D}$内连续，又设在D内点 (a_1, a_2) 处，h的梯度为零。则如果 $h(a_1, a_2)=b$，那么在D的边界上至少有四个不同的点，h在那些点之值为b。

证明 设Δ是$\overline{D}$内点集的分支，在Δ处 $h>0$，则在D内Δ的边界点上 $h=b$。但是因为 $h\neq b$，所以每个分支一定有D的边界上那些 $h>b$ 的边界点。对于 $h<b$ 的那些集合的分支也有类似的结论。在点 (a_1, a_2) 的邻域内，至少存在 $h>b$集合的两个分支和$h<b$集合的两个分支。如果 $h>b$ 集合的两个分支是单个分支Δ的一部分，在Δ内 $h>b$ 。那么我们总能找到一条连结这两个分支的弧，也就是D内通过点 (a_1, a_2) 的约当曲线。并且整个这条曲线围成了一个$h<b$的区域，这就与前面指出这种区域必须到达D的边界的结论发生矛盾。因此，至少有两个 $h>b$ 的不同分支和两个 $h<b$ 的不同分支。这些分支中每一个都在 $h\neq b$ 处与边界相交。但是，如果在边界上最多存在三个边界点 $h=b$ ，那么最多有三条余弧，在每条余弧上$h>b$或$h<b$，因此最多有 $h>b$ 和 $h<b$ 的三个分支。这就与已证的结论矛盾。

引理 7.6 设Γ是E^n的一条约当曲线，$x(u)$是定理7.1意义下，以Γ为边界的单连通广义极小曲面。则 $x(u)$ 或者是一个正则极小曲面，或者对于 E^n 内某些点，Γ具有这样的性质：通过这些点的每一个超平面与Γ最少交于四个不同的点。

证明：若仍采用前面证明定理 7.1 时用的一些记法，则可知$x(u)$在$\overline{D}$内连续并且确定了D内的一个广义极小曲面。假设在D的某点(a_1, a_2)处，$x(u)$非正则，那么所有的函数

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

在这点的值必为零。如果$L(x)\equiv\Sigma a_k x_k + C$是通过点$x(a_1 a_2)$的任一超平面的方程，则$h(u_1, u_2) = L(x(u_1, u_2))$是满足引理7.5中假设的一个函数，其中$b = 0$。可见曲线$\Gamma$上最少在四个不同点处，$L(x) = 0$，这就证得了此引理。

此引理说明，除非Γ是一条很复杂的曲线否则由它围成的曲面没有枝点。在许多特殊情况下，我们都可以断定由Γ围成的正则单连通曲面是存在的。此时，Plateau 问题也就完全解决了。

定理 7.2* 设D_1是(x_1, x_2)平面内的有界凸域，C_1是它的边界曲线。$g_k(x_1, x_2)$ $k=3, \cdots, n$是C_1上的任意连续函数。则在D_1内存在极小曲面方程（2.8）的一个解。

$$f(x_1, x_2) = (f_3(x_1, x_2), \cdots, f_n(x_1, x_2)),$$

使得$f_k(x_1, x_2)$在边界上取值为$g_k(x_1, x_2)$。

证明： D_1的边界C_1是一条约当曲线（甚至是可求长的约当曲线）並且函数$g_k(x_1, x_2)$确定了E^n内的一条约当曲线Γ，它的射影恰好就是C_1。由定理7.1知，在单位圆盘$|u|\leqslant 1$内存在着一个连续映射$x(u)$：$\overline{D}\longrightarrow E^n$，它确定了D内的一个极小曲面，並且此映射将D的边界曲线C同胚映射为曲线Γ。可见，映射$(u_1, u_2)\longrightarrow(x_1, x_2)$是$\overline{D}$的连续映射，在D的内部是调和映射並把C同胚映射到$C_1$上去。由引理7.1，D的像必在$D_1$内。此外，在D内映射的雅可比行列式必不为零。因为如果在D内某点(a_1, a_2)映射的雅

* 见附录3，5。

可比行列式为零，那么这个雅可比矩阵的所有行在这点就线性相关。即，存在适当的常数λ_1，λ_2，使得下列两式成立：

$$\lambda_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 0 \quad 及 \quad \lambda_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 0$$

此时，函数 $h(u_1, u_2) = \lambda_1 x_1(u_1, u_2) + \lambda_2 x_2(u_1, u_2)$ 就满足引理7.5的假设。可见 $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ 在C_1的四个不同点处可取相同的值，但根据 D_1 的凸性这是不可能的。因此得出结论：映射 $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ 是 D内的一个局部微分同胚。又因为它把C同胚映射到 C_1，所以它也是 D 到 D_1 的一个局部微分同胚，于是就能把 x_k，$k=3$，…，n 表示为x_1，x_2的函数，而这些函数恰好满足定理结论。

最后要注意，除了定理 7.1 的证明外，本节所有的结论都是由 Rado〔3〕书（$n=3$时）中的处理方法改编的。

§8 E^3内的参数曲面 高斯映射

到目前为止，我们所研究的一切问题都是在 3 维经典情况下进行的，这些问题与任意 n 维情况之间或者完全没有区别或者只是稍有一点区别。现在，要研究几个还没有被推广到任意 n 维空间，或者还需要作更详细讨论的问题。

当 $n=3$ 时，我们是能清楚地描绘方程

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \qquad (8.1)$$

的所有解的。因此我们主要从观察此方程着手研究。

引理 8.1 设D是复 ζ— 平面内的区域，$g(\zeta)$ 是 D 内的任一亚纯函数，$f(\zeta)$ 是D内具有以下性质的解析函数：在

每个使 $g(\zeta)$ 具有 m 阶极点的点 ζ 处，$f(\zeta)$ 至少有2m 阶零点，则

$$\phi_1=\frac{1}{2}f(1-g^2),\quad \phi_2=\frac{i}{2}f(1+g^2),$$

$$\phi_3=fg \tag{8.2}$$

是D 内的解析函数並满足方程（8.1）。反之，若有三个解析函数在D 内满足方程（8.1），则它们都可表示成（8.2）的形式。除非 $\phi_1\equiv i\phi_2$，$\phi_3\equiv 0$

证明： 通过直接计算可验证函数(8.2)满足方程(8.1)。

反之，给出方程（8.1）的任一组解，可令

$$f=\phi_1-i\phi_2,\qquad g=\frac{\phi_3}{\phi_1-i\phi_2}, \tag{8.3}$$

如果把方程（8.1）改写成以下形式：

$$(\phi_1-i\phi_2)(\phi_1+i\phi_2)=-\phi_3^2, \tag{8.4}$$

则

$$\phi_1+i\phi_2=-\frac{\phi_3^2}{\phi_1-i\phi_2}=-fg^2, \tag{8.5}$$

综合（8.3）和（8.5）可得（8.2）而且，关于 f 零点和g的极点的条件也显然满足。因为，否则由方程（8.5）可知 $\phi_1+i\phi_2$就不是解析函数了。只有在（8.3）式中关于 g 的表达式之分母恒为零时，（8.5）式才不可能成立，而此时，由（8.4）可知 $\phi_3\equiv 0$，它恰好又是定理所指出的必须除去的那种情况。

引理 8.2 E^3 内每个单连通极小曲面能表达成以下形式：

$$x_k(\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\zeta \phi_k(z)\,dz\right\} + C_k,$$

$$k = 1,\ 2,\ 3 \qquad (8.6)$$

式中的ϕ_k按（8.2）式定义，函数 f 和 g 具有引理8.1所述的性质，域D或者是单位圆盘或者是整个平面並且积分路径是沿着从原点到点ζ的任一条曲线。当且仅当 f 满足下述性质时，曲面是正则的：f 只在 g 的极点处取值为零，此时 f 的零点的阶数恰好是 g 的极点阶数的 2 倍。

证明：由引理6.3，曲面可用 $x(\zeta)$：$D \longrightarrow E^3$的形式来表示，D或者是圆盘或者是平面。坐标x_k是关于ζ的调和函数，如果令

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}, \qquad \zeta = \xi_1 + i\xi_2,$$

则这些函数必为解析函数並且（8.6）式成立。（式中积分是与路径无关的）对于广义极小曲面，方程（8.1）必须成立，再根据引理（8.1），则有表达式（8.2）。当且仅当所有的ϕ_k同时为零时，曲面才是非正则的，而这种情况的出现恰好是在 g 的正则点处 $f = 0$ 或者在g的极点处 $fg^2 = 0$。

值得注意的是：（8.2）和（8.6）这两种形式的表达式，最初是由 Enneper 和 Weierstrass 得到的，这两个表达式在 E^3 内极小曲面理论中起着重要作用。首先，利用它们能构造具有各种不同性质的很有趣的特殊曲面。例如，最明显的可选取 $f \equiv 1$，$g(\zeta) = \zeta$，于是导出了熟知的恩纳伯（Enneper）曲面。更重要的是，当我们把一些论述改成相应的关于解析函数的论述时，由这些表达式就能得到有关极小曲面的一般定理。为此，必须把与曲面有关的一些基本几何量用函数 f，g 来表示。

先看切平面，它是由向量

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi_2}$$

产生的，这里$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$。由此可得

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \tag{8.7}$$

式中

$$\lambda^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\right|^2 = \left|\frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right|^2 = \frac{1}{2}\sum |\phi_k|^2$$

$$= \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2。$$

此外又知

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \mathrm{Im}\{(\phi_2\overline{\phi_3}, \ \phi_3\overline{\phi_1}, \ \phi_1\overline{\phi_2})\},$$

把（8.2）代入上式可得

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2}$$

$$= \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)(2\mathrm{Re}\{g\}, \ 2\mathrm{Im}\{g\}, \ |g^2|-1)。$$

由此可见

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial x}{\partial \xi_2}\right| = \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2 = \lambda^2,$$

$$N = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2}}{\left|\dfrac{\partial x}{\partial \xi_1} \times \dfrac{\partial x}{\partial \xi_2}\right|}$$

$$=\left(\frac{2\mathrm{Re}\{g\}}{|g|^2+1},\ \frac{2\mathrm{Im}\{g\}}{|g|^2+1},\ \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}\right) \tag{8.8}$$

是具有标准定向的曲面的单位法向量。

在E^3内给定一个任意正则曲面$x(u)$，定义高斯(Gauss)映射为由 $x(u)$ 到单位球的映射，

$$x(u)N(u)=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u_1}\times\dfrac{\partial x}{\partial u_2}}{\left|\dfrac{\partial x}{\partial u_1}\times\dfrac{\partial x}{\partial u_2}\right|} \tag{8.9}$$

引理 8.3 若 $x(\zeta)$：$D\longrightarrow E^3$ 确定了一个以等温参数表示的极小曲面，则高斯映射 $N(\zeta)$ 就定义了一个由D到单位球（被看作是黎曼球）的复解析映射。

证明：把公式（8.8）与关于球极射影的公式（6.1）作比较就能说明：由高斯映射：$X(\zeta)\longrightarrow N(\zeta)$，再加上自点（0，0，1）出发的球极射影就得出了亚纯函数$g(\zeta)$。

要注意，一般来说，对于非正则曲面高斯映射是不能被确定的。然而，对于广义极小曲面高斯映射却能连续地、甚至是解析地扩充到枝点。这时，法向量N根据（8.8）的右边计算。

引理 8.4 设 $X(\zeta)$：$D\longrightarrow E^3$ 确定了一个广义极小曲面S，此处D是整个ζ—平面。则 $x(\zeta)$ 是一个平面或者 S 的法向量取最多除去两个方向以外的所有方向。

证明：伴随于曲面 S 有一个函数 $g(\zeta)$，它仅仅在$\phi_1\equiv i\phi_2$，$\phi_3\equiv 0$时无定义。而此时，x_3为常数，因此曲面是平面。除此以外，$g(\zeta)$ 在整个ζ平面是亚纯函数。由皮卡（Picard）定理，$g(\zeta)$ 或者取最多除去两个值以外的所有值，或者它是常数。再根据（8.8）式並把上述两种情况的

每一种都用于法向量N，而在后一种情况下，S是一个平面。

引理 8.5 设 $f(\zeta)$ 是单位圆D内最多有有限个零点的解析函数，则在D内存在一条发散路径C，使得以下不等式成立：

$$\int_C |f(z)||dz| < \infty \qquad (8.10)$$

证明： 首先假定在D内 $f(z) \neq 0$，定义

$$W = F(z) = \int_0^z f(\zeta) d\zeta$$

则 $F(z)$ 把 $|z|<1$ 映射到一个没有枝点的黎曼面上去。如果令 $Z = G(w)$ 是满足 $G(0) = 0$ 的逆函数的分支，那么，因为 $|G(w)|<1$，所以存在一个最大的圆盘 $|W|<R<\infty$，而 $G(w)$ 定义在此圆盘内。则必存在一点 W_0 满足 $|W_0| = R$ 而使 $G(w)$ 不能被扩充到 W_0 的邻域。设L是线段 $W = tw_0$，$0 \leqslant t < 1$，並设C是线段L在 $G(w)$ 下的象。那么，C必须是一条发散路径。因为，若不然则将有一序列 $t_n \longrightarrow 1$，使得C上相应的点列 Z_n 收敛于D内的点 Z_0. 但是，另一方面由于 $F(z_0) = w_0$ 及 $F'(z_0) = f(z_0) \neq 0$，于是函数 $G(W)$ 将能扩充到 W_0 的邻域，所以C是一条发散路径，並且满足：

$$\int_C |f(z)||dz|$$

$$= \int_0^1 |f(z)| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int_0^1 \left| \frac{dw}{dt} \right| dt = R < \infty.$$

若 $f(z)$ 没有零点，这就证得了引理。但是，如果它有有限个零点，譬如说，点 Z_k 为 ν_k 阶零点，则函数

$$f_1(z)=f(z)\Pi\left(\frac{1-\overline{Z}_k Z}{Z-Z_k}\right)^{\nu_k}$$

不会为零。根据上述推断可知存在一条发散路径C，使得

$$\int_C |f_1(z)||dz|<\infty$$

但是，在整个D内$|f(z)|<|f_1(z)|$，于是，(8.10) 得证。

定理 8.1 设S是E^3内的完备正则极小曲面，则S或者是一个平面，或者它的法向量处处稠密。

证明：假定曲面S的法向量不处处稠密，那么在单位球上必存在着一个开集，它与S在高斯映射的象不相交。通过空间的旋转变换，总可假定点（0，0，1）是在这个开集的内部。于是，单位法向量$N=(N_1, N_2, N_3)$就满足$N_3\leqslant\eta<1$，这对于S的万有覆盖曲面$\widehat{S}$同样正确，$\widehat{S}$可以用$x(\zeta)$: $D\longrightarrow E^3$的形式表示，其中D是平面或者是单位圆盘。但是D不可能是单位圆盘，因为由（8.8）可知 $N_3\leqslant\eta<1\Leftrightarrow|g(\zeta)|\leqslant M<\infty$，而又因为$\widehat{S}$是正则曲面，$f(\zeta)$ 不可能为零。但是，根据 (8.7) 任意路径C的长为

$$\int_C \lambda|d\zeta|$$

$$=\frac{1}{2}\int_C |f|(1+|g|^2)|d\zeta|<\frac{1+M^2}{2}\int_C|f|d\zeta$$

又根据引理8.5，必存在一条发散的路径C，此积分关于这条路径收敛，这样曲面就不是完备曲面，于是D是全平面。又因为法向量不取的点多于两个，由引理8.4可知，$\widehat{S}$必须是平面，这种情况对于S同样正确，而又因为S为完备曲面，

所以它必须是整个平面。

注意，Bernstan 定理可作为定理8.1的一个直接推论。事实上，在E^3内，定义在整个 x_1x_2 平面上的非参数极小曲面是完备正则曲面，它的法向量包含于半球内，因此，它必须是平面。

另一方面，从定理 8.1 很自然会引出这样的问题：已知一个非平面的完备极小曲面，能否说出球面上被高斯映射所去掉的点集的大小？

定理 8.1 告诉我们，至少当 S 为正则曲面时去掉的点的集合不可能包含任意点的邻域。通过引进对数容量零的集合这个概念还可以得到一个更强的结果。我们可以定义对数容量零集为球面上的闭集，在共形结构意义下，它的余集是抛物型的。（见第 6 节末的讨论）众所周知抛物性等价于格林函数的非存在性。（例如，见 Ahlfors及Sario〔1〕，Ⅳ6及Ⅳ22。）

引理 8.6 设D是复W平面的域，在黎曼球面上 D 的余集E有对数容量零的充要条件是函数 $\log(1+|w|^2)$ 在D内没有强调和函数。

证明：首先假定在 D 内存在一个调和函数 $h(w)$，使得 $\log(1+|w|^2)\leqslant h(w)$处处成立，那么$-h(w)$ 就是D内的负调和函数。因此，E有正对数容量。反之，若 E 有正对数容量，则对D内任意点w_0存在一个格林 (Green) 函数$G(W, W_0)$，它在 W_0 有极点。由定义知：$G(w, w_0)+\log|w-w_0|=h(w)$，式中 $h(w)$是D内的调和函数而且 $G(w, w_0)>0$，所以 $\log|w-w_0|<h(w)$，由于 $\log[(1+|w|^2/|w-w_0|^2]$ 为紧致集E上的连续函数，因此有一个有限的最大值M。这样，如果W_1是D的任意边界点，则

$$\overline{\lim_{w\to w_1}}\left[\log(1+|w|^2)-2h(w)\right]$$

$$\leqslant \overline{\lim_{w\to w_1}}\left[\log(1+|w|^2)-2\log|w-w_0|\right]\leqslant M$$

但是，$\log(1+|w|^2)$ 是D内的下调和函数，根据最大值原理，在整个D内都应有下式成立：

$$\log(1+|w|^2)\leqslant 2h(w)+M$$

定理 8.2* 设S是E^3的完备正则极小曲面。那么，或者S是平面或者S在高斯映射下象的余集E有容量零。

证明：如果S不是平面，那么S在高斯映射下的象是球上的连通开集。因此这个象的余集是一个紧致集E。如果E是空集，那就没有什么需要证明的了。否则，在事先做一个坐标旋转变换后，总可假定集合E含有点（0，0，1）。另外，我们还可以通过S的万有覆盖面$\widehat{S}$来研究，它的高斯映射去掉了相同的集合E。曲面S是由映射$x(\zeta)$：$D\longrightarrow E^3$给定的，这里D是整个平面或者是单位圆盘。在D为平面的情况下，集合E最多含有两个点，因此当然有容量零。再研究D是圆盘$|\zeta|<1$的情况。因为相伴的函数$g(\zeta)$是D内的解析函数而且根据$\widehat{S}$的正则性又知在D内$f(\zeta)\neq 0$。现在假设E的容量不为零，那么在映射$w=g(\zeta)$下在D的象D_1内函数$\log(1+|W|^2)$存在着强调和函数$h(w)$。于是$h(g(\zeta))$为D内的调和函数同时也是D内部的解析函数$G(\zeta)$的实部。一般说，$F(\zeta)=e^{G(\zeta)}$是D内的解析函数并且始终不为零。对于D内任一条路径C其长为

* 见附录3，4。

$$\int_C \lambda |d\zeta|$$
$$= \frac{1}{2}\int_C |f|(1+|g|^2)|d\zeta| \leqslant \frac{1}{2}\int_C |fF||d\zeta|$$

但是函数 $f(\zeta)F(\zeta)$ 在D内决不为零，而由引理8.5知，一定存在一条发散路径C，关于这条路径右边的积分收敛。因此S不是完备曲面。所以，E必须有容量零。定理证毕。

定理 8.3 设E是单位球上任意 k 个点的集合，$k \leqslant 4$。那么，在 E^3 内存在一个完备正则极小曲面，它在高斯映射下象的余集恰好是E。

证明： 通过旋转，总可假定 E 含有点（0，0，1）。如果它是E内唯一的一个点，那么已知的 Enneper 曲面（令 $f(\zeta)=1$，$g(\zeta)=\zeta$）早已解决了这个问题。否则，若 E 中不只含一个点，则令 E 的另一些点与球极投影下的点 W_m，$m=1, \cdots, k-1$ 相对应。如果令

$$f(\zeta)=\frac{1}{\sum\limits_{m=1}^{k-1}(\zeta-w_m)}, \qquad g(\zeta)=\zeta,$$

并在去掉点 W_m 的全平面上利用表达式（8.2）和（8.6）就可得到一个极小曲面，由（8.8）它的法向量恰好去掉了E的点而且它是完备极小曲面。因为一条发散路径C必须趋于∞或者趋于点 W_m 中某个点，而无论在那种情况下都有下式成立：

$$\int_C \lambda|d\zeta| = \frac{1}{2}\int_C |f|(1+|g|^2)|d\zeta| = \infty$$

要注意，虽然积分（8.6）可以是非单值的，但是通过万有覆盖曲面我们却得到了一个单值映射，它确定了一个有相同

性质的曲面。

让我们再简单地回顾一下上述定理的发展史。带有附加条件“S是单连通”的定理8.1是 Nirenbery 把它作为 Bernstein 定理的自然推广而推测出来並由 Osserman[1]所证得的，本节所给的定理取自Osserman[3]。显然，在 Osserman[3]中有无单连通性是无关紧要的。公式(8.2)、(8.6)与(8.8)是用于把这种几何论述转化为完全解析的论述。

在那篇文章中，引理8.5假设了 $f(z)\neq 0$，而定理8.2是作为一个猜测来陈述的。在论文的最后，定理8.2的证明是由 Ahlfors 得出的。他注意到，若利用上述方法化为对于解析函数的问题，则结论就可以从 Neranlinna 定理得到。Ahefors 认为在引理8.5中函数 $f(z)$ 可以有有限多个零点，这就使我们能作出以下的几何结论：假定广义极小曲面是单连通的並且只有有限个枝点，则定理8.1和8.2对于它们仍正确。此外，Ahlfors也注意到，当 $f(z)$ 有无限个零点並且假定它们的 Blaschke 积收敛时，引理8.5仍然成立。于是引理8.1和8.2对于一类有无限多个枝点的广义极小曲面也成立，但是这类曲面有怎样的几何特征却不很清楚。另一方面还要注意以下事实：存在着非平面的完备广义极小曲面，它的高斯映射是球上一个任意小的邻域。事实上只需选择D是单位圆 $|\zeta|<1$，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，$g(\zeta)=\varepsilon\zeta$ 並且 $f(\zeta)$ 是D内的解析函数，对每条发散路径C，$\int_C|f(\zeta)||d\zeta|=\infty$，这种函数 $f(\zeta)$ 可以用各种各样方式来构造。

再回过来看定理8.2，本节给的证明並没有根据边界特征函数的Nevanlinna定理，而取自 Osserman[4]，定理8.3

是由 Voss〔1〕给出的。

去掉4个法向量方向的完备曲面的例子早已由Osserman〔3〕给出。以后在Osserman〔6〕中还可看到经典的Scherk极小曲面还提供了另外的例子。

在把定理8.2和定理8.3作比较时，显然要提出去掉了法向量的集合 E 的确切大小的问题 *、特别要提出以下两个问题：

问题 1：是否存在完备的正则极小曲面？它的高斯象是否覆盖了去掉事先给定的任意有限个点的集合 E以外的整个球？

2．是否存在一个完备的正则极小曲面，它的高斯象是一个容量零的无限集的余集？

§9 在E^3内的曲面，高斯曲率和全曲率

利用表达式（8.2），我们继续研究 E^3内的极小曲面。

对于任意法向量 N，公式(1.27)定义了第二基本形式，此公式关于N是线性的。同时又因为在E^3内每点的法空间是一维的，因为只用一个法向量 N确定 $b_{ij}(N)$ 就足够了，通常取 N为（8.8）的形式。通过计算可求得在用（8.2）表示极小曲面时它的第二基本形式的表达式为：

---

* 见附录3，4。

$$\sum b_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt}=\mathrm{Re}\left\{-fg'\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\},$$

$$\zeta=\xi_1+i\xi_2 \tag{9.1}$$

由（8.7）则有

$$\sum g_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt}=\left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2$$

于是通过（1.28）可求得法曲率为：

$$\left[\frac{2}{|f|(1+|g|^2)}\right]^2\mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\};$$

$$\frac{d\zeta}{dt}=\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|e^{i\alpha}$$

当α从0变化到2π时，此表达式的最大值与最小值是由（1.30）所确定并称为主曲率，它们显然是

$$K_1=\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2},$$

$$K_2=\frac{-4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}, \tag{9.2}$$

现在对在E^3内任意一个正则C^2级曲面，把在一点的两个主曲率的乘积定义为在该点的高斯曲率K：

$$K=K_1K_2。 \tag{9.3}$$

引理 9.1 设$X(\zeta)$：$D\longrightarrow E^3$确定了极小曲面，则利用表达式（8.2）可求得在每点的高斯曲率

$$K=-\left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2。 \tag{9.4}$$

证明：由（9.2）和（9.3）直接可得。

推论： 极小曲面的高斯曲率是非正的，并且除了曲面是平面外它只能有弧立的零点。

证明： 由（8.8）可知，曲面S是平面⇐⇒N是常量⇐⇒g是常量⇐⇒$g'\equiv 0$。但因为g'为解析函数，所以或者g'有弧立的零点或者恒等于零。

注意下面的重要公式

$$K=-\frac{\Delta\log\lambda}{\lambda^2}, \tag{9.5}$$

利用公式（8.7）和（9.4），通过直接计算可证明此式。公式（9.5）对于用等温参数$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$来表示的任意曲面都成立，实际上这在微分几何中早已证过了。

现在对E^3内的任意一个极小曲面，研究以下一系列映射，其中Σ表示单位球：

$$D\xrightarrow{x(\zeta)}S\xrightarrow{\text{高斯映射}}\Sigma\xrightarrow{\text{球极射影}}W\text{平面。} \tag{9.6}$$

正如在引理8.3的证明过程中已看到的那样，这个复合映射是：

$$g(\zeta):\ D\longrightarrow W\text{平面。}$$

设$\zeta(t)$为D内任意一条可微曲线，考虑它在（9.6）映射中的每个映射下的像，若$s(t)$是$\zeta(t)$在曲面S上像的弧长，则显然下式成立：

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|, \tag{9.7}$$

而它在W平面内像的弧长为

$$\left|\frac{dw}{dt}\right| = |g'(\zeta)|\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|。\qquad (9.8)$$

若令 $\sigma(t)$ 是在球面上像的弧长，于是通过球极射影公式（6.1）可得

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2}{1+|w|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right|。\qquad (9.9)$$

将公式（9.4）与这些公式综合在一起考虑，则可得

$$\frac{d\sigma}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt} = \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} = \sqrt{|K|}, \qquad (9.10)$$

因此通过高斯映射，我们对高斯曲率作了进一步的解释。若令△是一个域，它的闭包在D内，由$X(\zeta)$限于Δ上面确定的曲面之全曲率可由下式计算：

$$\iint_\Delta K\,dA = \iint_\Delta K\lambda^2 d\xi_1 d\xi_2$$

$$= -\iint_\Delta\left[\frac{2|g'|}{1+|g|^2}\right]^2 d\xi_1 d\xi_2, \qquad (9.11)$$

它是Δ在高斯映射下高斯映射的像的面积的负值。（实际上这是高斯在定义任意曲面的高斯曲率时所用的最原始的定义）。当然，如果这个像是多重覆盖的，那么整个面积就是所有分叶面积之和。还要注意（9.11）也可等价地看作是在映射$g(\zeta)$之下，Δ之像的球面积。

在整个的讨论过程中，始终假设曲面S是定义在平面域D内的。此外还假定法向量N和函数g的值与参数的选取无关。

事实上，如果通过共形映射$\zeta(\overline{\zeta})$来引进一个新的等温

参数，则可得$\overline{\phi_k}(\overline{\zeta})=\phi_k(\zeta)\frac{d\zeta}{d\overline{\zeta}}$，K=1，2，3。而且由g的定义式（8.3）。又知它的值是不变的。因此若给定任意极小曲面则可用

$$M \xrightarrow{x(\zeta)} S \xrightarrow{\text{高斯映射}} \Sigma \xrightarrow{\text{球极射影}} W\text{平面。} \tag{9.12}$$

代替（9.6），此时复合映射

$$g(p):\ M \longrightarrow W\text{平面} \tag{9.13}$$

是M上的亚纯函数，而曲面S的全曲率仍然是在Σ上的像的面积之负值。为研究关于完备极小曲面的这种映射的性质，需要证明一系列引理，其中要证的第一个引理是引理(8.5)的推广，从某种意义来看也可以说是对引理(8.5)的说明。

引理 9.2 设D是平面域，$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$是D内的黎曼度量，其中$\lambda=\lambda(z)\in C^2$级，关于这个度量D是完备的。如果在D内存在着调和函数$h(z)$使得

$$\log\lambda(z)\leqslant h(z) \tag{9.14}$$

在D内处处成立，则D或者是整个平面或者是去掉一点的平面。

证明：若引进另一个新的度量$\widetilde{g}_{ij}=\widetilde{\lambda}^2\delta_{ij}$，其中$\widetilde{\lambda}=e^h$，则在整个D内$\lambda\leqslant\widetilde{\lambda}$，若C是D内任意一条发散路径，则

$$\int_C \widetilde{\lambda}|dz|\geqslant\int_C\lambda|dz|=\infty,$$

因此D关于度量$\widetilde{g}_{ij}$也是完备的，並且D的万有覆盖面$\widehat{D}$关于度量$\widetilde{g}_{ij}$也是完备的。但在$\widehat{D}$内任一点的邻域内，可引进一个实部为$h(z)$的解析函数$f(z)$，及映射

$$W=\int e^{f(z)}dz,$$

而W满足

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=|e^{f(z)}|=e^{h(z)}=\widetilde{\lambda}. \qquad (9.15)$$

于是在$\widehat{D}$上任意曲线关于度量$\widetilde{g}_{ij}$的长度等于它在W平面上的像的欧氏长度。由于$\widehat{D}$的单连通性，则必存在一个满足（9.15）式的由$\widehat{D}$到W平面的整体映射，而且根据$\widehat{D}$的完备性又可知此映射必为由$\widehat{D}$到整个W平面的一一映射。所以D的万有覆盖面共形等价于平面，可见D本身就是引理结论所断定的那种区域。

引理 9.3 设D是区域$0<r_1<|z|<r_2\leqslant\infty$，$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$为D内满足（9.14）式的黎曼度量，假定对形如$Z(t)$，$0\leqslant t<1$，並满足$\lim\limits_{t\to 1}|Z(t)|=r_2$的每条路径C有$\int_c\lambda|dz|=\infty$，则$r_2=\infty$。

证明：若$r_2<\infty$，于是假设

$$r_1<\frac{1}{r_2}<1<r_2;\quad \triangle=\left\{Z:\frac{1}{r_2}<|Z|<r_2\right\},$$

在△内引进度量$\widetilde{g}_{ij}=\widetilde{\lambda}\delta_{ij}$，其中$\widetilde{\lambda}(z)=\lambda(z)\lambda(1/z)$，则容易验证，在△内度量$\widetilde{g}_{ij}$满足引理9.2的假设条件，因此

引理9.2的结论必成立。但它与引理9.3的假设不符，于是引理9.2的结论又不能成立，这矛盾是由于假设 $r_2<\infty$ 而引起的，故引理得证。

引理 9.4 设D是双曲域，$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$ 是D的一个度量，并且D关于度量 $g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$ 是完备域，又设

$$\Delta\log\lambda\geqslant 0 \tag{9.16}$$

$$\iint_D |\Delta\log\lambda|dxdy<\infty, \quad Z=x+iy, \tag{9.17}$$

则在D内存在一个满足（9.14）的调和函数 $h(z)$。

证明：因为D是双曲域，对D内每一点 ζ 必存在一个调和格林函数 $g(z,\ \zeta)$，当 $Z\neq\zeta$ 时它又是正的并且在整个D内 $g(z,\ \zeta)+\log|z-\zeta|=H(z,\ \zeta)$ 是Z的调和函数。（例如见Ahlfors 和 Sario〔1〕，1V6.）令

$$u(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\iint_D G(z,\ \zeta)\Delta\log\lambda(z)dxdy,$$

根据（9.17）和格林函数的基本性质可知，这个积分是存在的，而且由（9.16）又知 $u(\zeta)\geqslant 0$。但是根据泊松公式又有 $\Delta u=-\Delta\log\lambda$，所以 $h(z)=u+\log\lambda$ 是D内的调和函数，又因为 $u\geqslant 0$，故 $h(z)\geqslant\log\lambda$。

注：公式（9.5）不仅适用于求 E^3 中任意曲面的高斯曲率，也能用它来定义关于形如 $g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$ 的任意黎曼度量的高斯曲率。可以直接验证高斯曲率在参数的共形变换下是不变量。因此（9.16）等价于

$$K\leqslant 0, \tag{9.18}$$

而（9.17）等价于

$$\iint_D |K|dA < \infty. \tag{9.19}$$

定理 9.1 设M是完备二维黎曼流形，它的高斯曲率满足（9.18）和（9.19）。则存在着紧致二维流形$\widetilde{M}$及$\widetilde{M}$上的有限个点P_1，…，P_k并且M与$\widetilde{M}-\{P_1, \cdots, P_k\}$是等距的。

证明：由A.Huber定理可知，在完备二维流形M上的条件(9.19)可推出M是有限连通的(A·Huber〔1〕，P.61)。这就意味着在M上存在一个相对紧致区域M_0，其边界是有限条解析的约当曲线γ_1，…，γ_k，使得$M-M_0$的每个分支M_j是双连通的。(见Ahlfors和Sario〔1〕，Ⅰ 44D和Ⅱ 3B)于是每个M_j可共形映射到圆环D_j：$1<|z|<r_j\leqslant\infty$上去，其中曲线γ_j对应于$|z|=1$。取M_j上的度量为D_j内$g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$的形式，则条件（9.18）和(9.19）就分别变为（9.16）和（9.17）。因为函数$\mathrm{Re}\{\frac{1}{z}-1\}$是负调和函数，因此区域$D_j$显然是双曲域。根据引理9.4可知，存在一个满足（9.14）的调和函数h(z)，又由引理9.3（和M的完备性）可见$r_j=\infty$。设$\widetilde{D}_j$是对黎曼球面上的圆盘D_j添加一个∞点后的扩充，$\widetilde{M}$是把圆盘$\widetilde{D}_j$沿γ_j"焊接"到M_0所得到的紧致曲面（见Ahlfors和Sario〔1〕，Ⅱ 3C)。于是M共形等价于$\widetilde{M}-\{P_1, \cdots, P_k\}$，其中$P_j$是点$\widetilde{D}_j-D_j$，再通过带上M上的度量，这个对应就变成等距对应了。

引理 9.5 设$X(p)$：$M\longrightarrow E^3$确定了一个完备正则极小曲面S。如果S的全曲率是有限的，则定理9.1的结论正确

而且映射（9.13）中的函数g(p)能扩充为$\widetilde{M}$上的亚纯函数。

证明：由前面的证明可知，极小曲面的全曲率$K \leqslant 0$，因此$\left|\iint K dA\right| = \iint |K| dA$，所以全曲率有限就等价于（9.19）成立。于是可应用定理9.1，并且可以把g(p)看作是在$\widetilde{M}-\{P_1, \cdots, P_k\}$上的亚纯函数。若任意一点$P_j$是g的本性奇异点，则根据皮卡定理，g取每个值无限多次（至多有两个值例外），但是这就推出像的球面积无限，因此全曲率也无限，这与假设矛盾。于是g在每一点P_j处至多有一个极点，因此g在整个$\widetilde{M}$上为亚纯函数。

定理 9.2 设S是E^3内的完备极小曲面，则S的全曲率只能取值$-4\pi m$，其中m是非负整数或$-\infty$。

证明：因为$K \leqslant 0$，则或者在整个曲面上积分$\iint K dA$发散为$-\infty$，或者全曲率是有限的。在后一种情形下，可用引理9.5并求得全曲率是在映射g下$\widetilde{M}-\{P_1, \cdots, P_k\}$的像的球面积之负值。但又因为在$\widetilde{M}$上g是亚纯函数，因此K或者是常数，在这种情况下$K=0$，否则它取每个值固定多次，譬如m次，于是这个像的球面积是$4\pi m$。

引理 9.6 设f(z)是定义在$0 < r_1 < |z| < \infty$上的非零解析函数，又设对每条发散到无穷的路径C有

$$\int_C |f(z)||dz| = \infty, \tag{9.20}$$

则f(z)至多在无穷远处有一个极点。

证明：因为$f(z) \neq 0$，$\log|f(z)|$为调和函数，在无穷远处有罗朗（Laurent）展开式成立，

$$\log|f(z)|=a\log|z|+h(z)+H(z),$$

式中 $h(z)$ 为调和函数而且当 $r_1<r_2<|z|<\infty$ 时为有界函数。$H(z)$ 在有限平面 $|z|<\infty$ 内也是调和函数。若N为大于a的任一正整数，可见当$|z|>r_2$时

$$\begin{aligned}|f(z)|=|z|^a e^{h(z)}e^{H(z)}&\leqslant M|z|^N e^{H(z)},\\ &=M|Z^N e^{G(z)}|,\end{aligned}\qquad(9.21)$$

其中M是适当的常数,$G(z)$是整函数,其实部等于$H(z)$。现在引进整函数

$$W=F(z)=\int z^N e^{G(z)}dz,\qquad F(0)=0,$$

并注意在 $z=0$ 的邻域内存在着满足 $\zeta'(0)\neq 0$ 的单值分支

$$\zeta(z)=[F(z)]^{1/N+1}。$$

因此在 $\zeta=0$ 的邻域内有反函数 $z(\zeta)$，并且这个反函数或者能扩充到整个 ζ—平面，或者存在一个最大圆盘$|\zeta|<R$，而反函数 $z(\zeta)$ 能够扩充到这个圆盘。但后一种情况是不可能发生的，因为那时就会存在一点ζ_0，满足$|\zeta_0|=R$，而这个反函数不可能扩展到这点。如果研究曲线 $\zeta(t)=t\zeta_0$，$0\leqslant t<1$，在 Z 平面上它的逆像沿路径C的积分为

$$\int_C |z^N e^{G(z)}||dz|=\int_C |F'(z)||dz|=R^{N+1}。$$

如果路径C发散于无穷，那么从某一点起C就落在区域$|Z|>r_2$内，由于（9.21），这将与（9.20）相矛盾。因此C不可能发散于无穷，而且在C上必存在着一个点列Z_n，它有有限

的聚点 Z_0，使到在 ζ 平面内这些点的像趋于 ζ_0。但是因为 $F'(z_0)\neq 0$，因此就能将逆映射扩展到点 ζ_0，这样一来就可得出逆函数 $z(\zeta)$ 是定义在整个 ζ 平面内的结论。此外由于

$$Z(\zeta_1)=Z(\zeta_2)\Rightarrow F(Z(\zeta_1))=F(Z(\zeta_2))\Rightarrow$$

$$\zeta_1{}^{N+1}=\zeta_2{}^{N+1}。$$

这说明每个值至多取 $N+1$ 次，而且 $Z(\zeta)$ 必须是一个多项式。但是 $Z(\zeta)=0\Rightarrow\zeta=0$，因此对某个整数K必有 $Z(\zeta)=A\zeta^k$。最后，由 $Z'(0)=AK\zeta^{k-1}\neq 0$ 推出 $K=1$，$A\neq 0$，所以 $F(Z)=(Z/A)^{N+1}$，$G(Z)$ 为常数。同理可得 $H(Z)$ 也必为常数，所以在无穷远附近 $|f(z)|\leqslant M_1|Z|^N$ 接近无穷，$f(z)$ 至多在无穷远处有一个极点。

定理 9.3* 设S为 E^3 内完备正则极小曲面，则

$$\iint_S K\,dA\leqslant 2\pi(\chi-k), \tag{9.22}$$

其中 χ 是S 的欧拉（Euler）示性数，K是边界分支数。

证明： 如果（9.22）左端的积分发散于 $-\infty$，这个结果显然成立。否则 S 有有限的全曲率，这样就可以应用定理9.1和引理9.5。根据函数 g 和曲面的法向量之间的关系式（8.8）并通过事先把空间作一个旋转后总可假设在点 p_i，$g(p)\neq 0,\ \infty$，而且 $g(p)$ 的极点全部是一重极点。在 $M=\widetilde{M}-\{p_1,\cdots,p_k\}$ 的任一点的邻域内存在着以等温参数 ζ 表示的表达式（8.2）。正如我们早已注意到的，在参数 $\zeta(\widetilde{\zeta})$ 的共形变换下，相应的函数 $\widetilde{\phi}_k(\widetilde{\zeta})$ 必满足 $\widetilde{\phi}_k(\widetilde{\zeta})=\phi_k(\zeta)$

---

* 见附录3，4。

$d\zeta/d\tilde{\zeta}$，对 $f(\zeta)$ 也有类似的表达式。这就可得出 ϕ_k 或 f 在某点存在零点，与它的级的阶数一样均与局部参数的选择无关。由引理 8.2 可知，在 g 的每一个一重极点处 f 必须有二重零点，并且 f 没有其它零点。所以如果在 $\widetilde{M}$ 上函数 g 有 m 阶极点，那么在M上函数 f 恰好有 2m 阶零点，在每一点 p_j 处可引进局部坐标 ζ 使得对应于 p_j 点$\zeta=0$。当 $0<|\zeta|<\varepsilon$ 时，则有 $|g|<M$，因此 $f\neq 0$。此外若C是M上趋于 p_j 点的一条曲线，则由 S 的完备性可得

$$\infty=\int_C\lambda|d\zeta|=\frac{1}{2}\int_C|f|(1+|g|^2)|d\zeta|$$

$$\leqslant\frac{1+M^2}{2}\int_C|f||d\zeta|。$$

由引理9.6可见 f 在原点处必有极点。根据在（8.6）式中，$X_k(\zeta)$在 $0<|\zeta|<\varepsilon$ 内是单值函数这个事实，又因为假设了 $g(p_j)\neq 0$，那么容易看出在 p_j 点，f 的极点的阶数 γ_j 至少等于 2。于是 $f(\zeta)d\zeta$ 在$\widetilde{M}$上是亚纯微分，同时有黎曼关系：极点个数减去零点个数等于 $2-2G$，其中 G 是$\widetilde{M}$的亏格（见Ahlfors 和 Sario〔1〕，V27A）。此外又因为 M 的欧拉示性数 χ 等于 $2-2G-K$，因此有

$$2-2G=\sum_{j=1}^{K}\gamma_j-2m\geqslant 2K-2m$$

和

$$\iint_S K\,dA=-4\pi m\leqslant 2m(2-2G-2K)=2\pi(\chi-K),$$

注：Cohn—Vossen 证明了不等式$\iint_S K dA \leqslant 2\pi\chi$ 对任一个具有有限全曲率以及有限欧拉示性数χ的二维完备黎曼流形是成立的。特别是从（9.22）可见，在极小曲面的情形下Cohn—Vossen不等式中等号是不能成立的。在Finn〔6〕的最近发表的一篇论文中已讨论了这个问题，在每个边界分支处他引进了一个几何量，它起着Cohn—Vossen不等式两端的补尝因子的作用。利用这种方法他得到对函数f在p_j点处极点阶数ν_j作出了几何解释。

定理 9.4 只存在两个全曲率为-4π的完备正则极小曲面。它们是悬链面和恩纳伯曲面。

证明：这是定理9.2当$m=1$的情形。它表示函数g是一阶亚纯函数，因此将$\widetilde{M}$共形映射到黎曼球面Σ上。于是$\widetilde{M}$的亏格$G=0$，并且不等式（9.22）可简化为$K\leqslant 2$。所以可以选取M为去掉一点或是去掉两点的Σ，此时$g(\zeta)=\zeta$，而且根据引理9.6可知$f(\zeta)$是有理函数。考虑到曲面的完备性和函数$X_k(\zeta)$是单值的这个事实，容易看到只有选取$f(\zeta)$满足这些条件时，恰好就能得到定理结论中的两个曲面。

推论：恩纳伯曲面和悬链面是仅有的两个高斯映射为一对一的完备正则极小曲面。

证明：如果高斯映射是一对一的，则全曲率是像的面积之负值，它满足

$$-4\pi\leqslant\iint_S K dA<0。$$

由定理9.2知等式左端成立，于是由定理9.4可得结论。

在证明上述关于全曲率定理时所使用的方法同样可用于

更精确地去研究高斯映射的性质，以补充和加深前节所得到的一些结果。下面举一个例子。

定理 9.5 设S是一个正则极小曲面，并设在曲面S上所有趋于S的某个弧立边界分支的路径都有无限长。则在边界分支处S的法向量趋于一个单极限，或者在S的边界分支的每个邻域内S的法向量取所有方向最多除去一个容量为零的集。

证明：所谓一个弧立边界分支的邻域，是指一个双连通的域，它的相对边界是一条约当曲线y。在曲面上可以用$X(\zeta)$：$D \longrightarrow E^3$来表示这个区域。其中D是环形域$1<|\zeta|<r_2\leqslant\infty$，曲线$y$对应于$|\zeta|=1$，并且还可以在D内引进表达式（8.2）。现在假设在这个边界分支的某个邻域内法向量略去一个正容量集。这也意味着对某个$r_1\geqslant 1$，函数$W=g(\zeta)$在区域D'：$r_1<|\zeta|<r_2$内略去一个正容量集。由引理8.6，经过映射$g(\zeta)$，在D'的像内必存在着调和函数$h(w)$，使得$\log(1+|w|^2)\leqslant h(w)$。因为曲面S的度量是由$\lambda=\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)$给出的，则有

$$\log\lambda(\zeta)\leqslant\log\frac{|f(\zeta)|}{2}+\log h(g(\zeta))$$

因为在D'内上式右端是调和函数，所以可应用引理9.3推出$r_2=\infty$。但是，另一方面根据皮卡定理在无穷远处$g(\zeta)$不可能有本性奇异点，于是，当ζ趋于无穷时，$g(\zeta)$趋于一个有限的或者无限的极限。这个结论对曲面的法向量也同样正确。

不用作详细讨论，只要依上述方法进一步分析还可得出

下面的结果：

设 S 是 E^3 内的完备极小曲面，则S有无限全曲率⇐⇒S的法向量取所有方向无穷多次最多除去对数容量零的集；

S 的全曲率为非零有限数 ⇐⇒ S 的法向量以有限次数取所有方向，至多除掉三个方向；

S 的全曲率为零⇐⇒S 是平面。

以上结果和本节的其它定理是都包括在Ossermann〔4，5〕两篇论文中，但是这里所给的表现形式与论文中稍有不同。引理9.4是以 A·Huber〔1〕论点为基础，他利用引理9.4得到下面的结果：

若 S 是完备曲面，并且 $\iint_S K^- dA$ 收敛，其中 $K^- = \max\{-K, 0\}$，则 S 是抛物型的。（在 S 是单连通的和有实解析度量的情况下，这个结论早已由Blanc 和 Fiala得到），引理9.6是由Maclane〔1〕和 Voss〔1〕宣布的，但他们没有给以证明。本概论采用的是由 Finn〔6〕给出的证明。以相同的论证他得到了更一般的结果，而这个结果对我们来说并不需要。定理9.4的推论是由Ossermann〔6〕和 Voss〔1〕各自独立得到的。

最后，让我们注意有很多亏格不等于零的完备极小曲面的例子与上面结果有关*，Klotz 和 Sario 证明了存在着任意亏格和连通数的完备极小曲面。此外，还可以证明（Ossermann〔6〕）古典 Scherk 曲面有无限个亏格。下面是没有解决的问题。

问题：是否存在一个有有限全曲率的完备极小曲面，它

---

* 见附录3，4。

的法向量除去三个方向？

如果存在则“3”是精确的界限。如果不存在，最大值是“2”并可由悬链面来得到它。

§10 在E^3内的非参数极小曲面

研究非参数形式的极小曲面与研究极小曲面方程

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \tag{10.1}$$

的解是一致的，因此它可以看做是非线性椭园型偏微分方程理论中的一章。正如在前一节所看到的那样，用复变函数和黎曼面的理论可以得到很多关于极小曲面的几何结果。现在将指出极小曲面的很多性质是由于方程（10.1）的形式所造成的，而在下一节将反过来利用参数理论去推导方程(10.1)解的性质。

这节的基本想法是把方程（10.1）的未知解与一个具有熟知性质的固定解进行比较。由下面基本引理的成立，可知这种想法是可行的。

引理10.1 设F和G是在有界域D内方程（10.1）的两个解。假设对趋近D之边界的任意一个点列都有$\lim(F-G)\leqslant M$，则在整个D内$F-G\leqslant M$成立。

证明：这个引理对更一般的类型的方法也是成立的，方程（10.1）只是特殊情况。可参考Courant—Hilbert〔1〕，P323的讨论。

研究方程（10.1）的一个有趣的特点就是从某一方面来看，由于一般椭园型方程的理论，它的解恰好表现出上述引

理所预料的情况。而另一方面，这些解又显示出完全意料不到的性质。以后要举一个例子说明在整个平面内解（不是平凡线性解）的不存在性（Berstein 定理）。现在另外再给一些例子。首先我们要指出，对于某些域D，既使已知的假设只在部分边界上成立，引理10.1的结论也是正确的。引进下面记号，令

$$G(r;\ r_1)=r_1\cosh^{-1}\frac{r}{r_1},$$

$$r\geqslant r_1;\ G(r;\ r_1)\leqslant 0 \qquad (10.2)$$

方程

$$X_3=G(r;\ r_1), \qquad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \qquad (10.3)$$

确定了悬链面的下半部分，并且是极小曲面方程在圆$x_1^2+x_2^2=r_2^2$外面的整体解在这个圆上取边界值为零。

引理10.2 设D是圆环域 $r_1<r<r_2$ 内的一个区域，$F(x_1,\ X_2)$是（10.1）在D内一个任意解。如果已知的关系式

$$\overline{\lim}(F(x_1,\ x_2)-G(r;\ r_1))\leqslant M \qquad (10.4)$$

对趋向于 D 的边界点且不在圆 $r=r_1$ 上的任意点列是成立的，则在整个D内

$$F(x_1,\ x_2)\leqslant G(r;\ r_1)+M \qquad (10.5)$$

成立。

注：引理10.1的一种最惊人的说明是取域D就是圆环$r_1<r<r_2$，于是由（10.4）在外圆$r=r_2$上成立这一事实就

能推出在整个域D上（10.5）成立，因此在内圆 $r=r_1$ 上 $\overline{\lim}F(x_1, x_2)\leqslant M$。在几何学上可以把这种状态描述如下：在圆环上给定一个任意极小曲面，如果把悬链面的冠安置在圆环上并使得沿外圆曲面在下方，这样整个极小曲面就在悬链面的下面了。这种情况和调和函数的下面性质有显著的不同。调和函数可以在内圆上取任意大的值，与外圆上的值无关，并且我们可以找到在圆环内取这些边界值的调和函数。

证明：对于满足 $r_1<r_1'<r_2$ 的一个任意 r_1'，设

$$\varepsilon=\max_{r_1'\leqslant r\leqslant r_2}|G(r;\ r_1)-G(r;\ r_1')|。$$

于是，由（10.4）式可知，对于圆环 $r_1'\leqslant r\leqslant r_2$ 内趋于D的边界点的所有点列有以下不等式成立：

$$\overline{\lim}(F(x_1,\ x_2)-G(r;\ r_1'))\leqslant M+\varepsilon。\qquad(10.6)$$

我们希望在区域 $D'=D\cap\{r_1'<r<r_2\}$ 内得到结论：

$$F(x_1,\ x_2)\leqslant G(r;\ r_1')+M+\varepsilon,\qquad(10.7)$$

于是令 r_1' 趋于 r_1 即可得到引理要证明的结论。

为了证明（10.7），根据引理10.1，只要证明（10.6）在 D' 的每个边界点成立就足够了。因为已知它在D的边界点处是成立的，所以只需证明（10.7）在D的内点，即在圆 $r=r_1'$ 的点上成立就足够了。用反证法，假设（10.7）在 $r=r_1'$ 上不成立，则函数 $F(x_1,\ x_2)-G(r;\ r_1')$ 在D内 $r=r_1'$ 圆上的某一点 $(a_1,\ a_2)$ 处有极大值 $M_1>M+\varepsilon$。而根据引理10.1可知在整个域 D' 内可有以下的不等式成立：$F(x_1,\ x_2)-G(r;\ r_1')\leqslant M_1$。另一方面，F在点 $(a_1,\ a_2)$ 有有限的

梯度，而由（10.2）

$$\left.\frac{\partial G(r,\ r_1')}{\partial r}\right|_{r=r_1'}=-\infty。$$

因为在点（a_1，a_2）$F-G=M_1$，可见对在D'内充分接近点（a_1，a_2）和原点的所有点$F-G>M_1$，这是由于假设（10.7）不成立而得出的矛盾，故引理证毕。

下面介绍有关此引理的几个应用。首先介绍关于方程（10.1）解的广义极大值原理。

定理10.1 设$F(x_1,\ x_2)$是极小曲面方程（10.1）在有界域D内的解。假设对D的每个边界点（a_1，a_2），可能有有限个点例外，关系式

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}} F(x_1,\ x_2)\leqslant M,\\&\underline{\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)}} F(x_1,\ x_2)\geqslant m\end{aligned}\tag{10.8}$$

成立，则在整个域D上有

$$m\leqslant F(x_1,\ x_2)\leqslant M。\tag{10.9}$$

证明：只要证明（10.9）的右端不等式成立就足够了，因为只要通过把F看成$-F$就可得到左端不等式的证明。先用反证法来证明。假设$\operatorname{Sup}F=M_1>M$。那么在D内存在一个点列，沿着这个点列F趋于$M_1$，并且这个点列子序列必然趋于边界点中那些例外点中的一个。（如果假定F在D的内部点取最大值，那么因为在局部等温参数下X_3是调和函数，则这个最大值必须是常数）。我们总可假设通过平移变换能使这点成为原点，并可选取$r_2>0$，使得另一些例外的

边界点没有一个在圆盘$r\leqslant r_2$内。任意选取r_1使得$0<r_1<r_2$并设D'是D与$\{r_1<r<r_2\}$的交最后，对于区域D在圆$r=r_2$上的那些点，再设$M_2=\text{Sup}F$。可以断定$M_2<M_1$。也就是在圆$r=r_2$上给了一个点列，沿着这个点列F趋于M_2，并且有一个聚点，这个聚点或者在D的边界上，在这种情况下$M_2\leqslant M$，或者它在D的内部，此时在那个聚点处$F<M_1$。因为如果不是这样，则$F\equiv M_1>M$就与（10.8）矛盾。综上所述，在D'的所有边界点，对于这些边界点$r>r_1$，可得如下结论：

$$\overline{\lim}(F(x_1,\ x_2)-G(r;\ r_1))\leqslant M_3-G(r_2;\ r_1),$$

$$M_3=\max\{M,\ M_2\}<M_1。$$

由引理10.2可见，在整个D'上

$$F(x_1,\ x_2)\leqslant G(r;\ r_1)-G(r_2;\ r_1)+M_3$$

成立。现在，对每个固定的r，从（10.2）可见当$r_1\to 0$时$G(r;\ r_1)\to 0$并且可导出当$0<r<r_2$时$F(x_1,\ x_2)\leqslant M_3<M_1$，但这又与沿着趋于原点的点列$F\to M_1$是矛盾的。结论随之可得。

注意在定理10.1的论述过程中，每个例外点或者在一个边界连续统上或者就是一个孤立边界点。在后一种情况下，上面的证明可以大大简化，并且还可得到一些更强的结论。

定理10.2* 一个极小曲面方程的解不可能有孤立的奇点。

证明：设$F(x_1,\ x_2)$是方程（10.1）在一个有孔圆盘

---

*见附录3，5。

$0<r<\varepsilon$ 内的一个任意解。我们希望证明 $F(x_1, x_2)$ 能连续的扩充到原点，这样所得的曲面 $X_3=F(x_1, x_2)$ 就是在整个圆盘$r<\varepsilon$上的正则极小曲面。

选取r_2， $0<r_2<\varepsilon$，并设当 $x_1^2+x_2^2=r_2^2$ 时。$|F(x_1, x_2)|\leqslant M$。再根据定理7.2，必存在一个确定的函数$\widetilde{F}(x_1, x_2)$，它在圆盘$r\leqslant r_2$内连续，在 $r<r_2$ 内满足（10.1），当 $r=r_2$ 时 F与$\widetilde{F}$ 有相同值。那么当 $r\leqslant r_2$ 时还有 $|\widetilde{F}|\leqslant M$ 成立。事实上，将要证明的是当 $0<r<r_2$ 时，有$\widetilde{F}=F$，因此$\widetilde{F}$就是所想要的解 F 的扩充。为此回想一下以下的记号。

$$W=\sqrt{1+p^2+q^2}\text{；}\quad P=\frac{\partial F}{\partial x_1},\quad q=\frac{\partial F}{\partial x_2},$$

于是方程（10.1）可写成以下形式：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0, \tag{10.10}$$

其中

$$\phi=\frac{p}{W},\qquad \psi=\frac{q}{W} \tag{10.11}$$

（这就是方程（3.14）在 $n=3$ 时的特殊情形，而这种情况是容易直接证明的）。

现在，对于函数$\widetilde{F}$引进相应的量，并且在圆环D_λ：$\lambda\leqslant r\leqslant r_2$内研究这两个函数之差。如果令$C_\lambda$是圆 $r=\lambda$，那么由于在 $r=r_2$ 圆上，$F-\widetilde{F}=0$ 这一事实，并把格林定理应用到区域D_λ上去就可推得

$$\int_{C_\lambda} (F-\widetilde{F})[(\phi-\widetilde{\phi})dx_2-(\psi-\widetilde{\psi})dx_1]$$

$$=\iint_{D_\lambda}[(p-\widetilde{p})(\phi-\widetilde{\phi})+(q-\widetilde{q})(\psi-\widetilde{\psi})]dx_1dx_2 \tag{10.12}$$

其中利用了函数F与$\widetilde{F}$都满足方程（10.10）的这个条件。再从（10.11）和W的定义可得到 $\phi^2+\psi^2<1$，类似地还可得$\widetilde{\phi}^2+\widetilde{\psi}^2<1$。因为$|F-\widetilde{F}|\leqslant 2M$，可见当$\lambda\to 0$时(10.12)的左端趋于零。但是通过把引理5.1用到函数 $E(p, q)=\sqrt{1+p^2+q^2}$，又容易看到(10.12)右端的被积函数非负。把p和q作为独立变量来研究，并求得

$$\frac{\partial E}{\partial p}=\frac{p}{W}=\phi, \qquad \frac{\partial E}{\partial q}=\frac{q}{W}=\psi,$$

这样，(10.12)右端被积函数就化为(5.2)式左端的表达式。于是若在某些点$(p-\widetilde{p})^2+(q-\widetilde{q})^2\neq 0$就可见(10.12)右端的被积函数在那点为正，因此在那点的邻域内也取正值。所以当λ趋于零时，积分不能趋于零。于是当$0<r<r_1$时，可得结论 $p-\widetilde{p}\equiv 0$，$q-\widetilde{q}\equiv 0$，同样也有$F-\widetilde{F}\equiv 0$，于是证明了定理。

这个定理的证明同定理10.1和引理10.2的证明都是Finn〔5〕得到的。事实上引理10.2是Finn的引理(〔5〕，139页)的特殊情况。定理10.2和定理10.1中的例外边界点是孤立的那种情形，最初是由 Bers〔1〕给出的。上面所表达的定理10.1的形式是由Nitsche及Nitsche〔1〕给出的，以后又推广为允许例外点集是一个任意的线性豪斯道夫测度为零的集合（Nitsche〔5〕）。类似地Bers关于可去奇点定理可作如

下的推广*：若D是有界域，E是D的紧子集，它的线性豪斯道夫测度为零，那么在 D－E 内极小曲面方程的每个解就能扩充为在整个D内的解。这个结果是由Nitsche〔5〕，De Giorgi和Stampacchia〔1〕各自独立得到的。这种情形与 $n>3$ 的情形完全不同，在那里甚至极小曲面方程的有界解都可以有孤立的非可去奇异点（Ossermann〔10〕）**。

下面转向研究引理10.2的其它应用，就是研究关于极小曲面方程的狄利克雷问题的可解性。为此目的，引进以下概念。

定义：设D是平面域，P是D的边界点。若存在一个通过P点的圆C和P点的某个邻域，此邻域与C的外部的交集在D内时，则说P是凹性点，而称C为点P的内切圆。

引理10.3 设D是有界平面域，P是边界上的凹性点，C是内切于P点的圆。若F是极小曲面方程在D内的解，则F在P点的边界值是由F在C的边界外部的值所限制的。

证明：设C是以原点为圆心，以 r_1 为半径的圆。整个域D包含于某个圆 $r<r_2$ 之内。假设对于在C外部域D的所有边界点处有 $\overline{\lim} F\leqslant M$。则把引理10.2用于D与C的外部的交集上，则当 $r_1<r<r_2$ 时，有 $F\leqslant G(r; r_1)-G(r_2; r_1)+M$ 成立，因此

$$\overline{\lim_{Q\to P}} F(Q)\leqslant M-G(r_2; r_1)。\qquad (10.14)$$

引理10.4 设D是任意的平面域，则D为凸域的充要条件是在D的边界上不存在凹性点。

证明：首先假设P是D的凹性点，C是在P点的内切圆。

---

*，**见附录3，5。

那么在 P 点与 C 相切的线段之端点将在D内，而切线段本身却含有不在D内的点P，因此D不可能是凸域。反之，若D不是凸域，则在 D内存在两点Q_1，Q_2，而联结这两点的线段却不在D内。设$Q(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 是在D内联结Q_1，Q_2两点的曲线，那么存在一个 t 的最小值t_0，关于这个最小值从Q_1到$Q(t_0)$ 的线段L不完全在 D 内。当 $t_0>0$ 时，对于所有充分接近t_0的较小的 t 值，从Q_1到$Q(t)$的线段都在 D内并且在L的同一侧。因此存在一个D的开子集Δ，它是由在 L 的某一侧并充分接近 L的所有点和圆盘内围绕每个端点的所有点一起构成的。通过在Δ内选取联结 L端点的充分光滑的圆弧且变动它直至它第一次切于 D的边界，就能找到一个凹性点。

定理10.3 设 D 是平面内的有界域。D为凸域的充要条件是在 D内存在着极小曲面方程（10.1）的一个解，此解在边界上取任意选定的连续值。

证明： 首先假设 D 是凸域，那么由定理7.2能够解决对任意一些连续边界值的边值问题。另一方面，若D 不是凸域，则由引理10.4在 D 的边界上必存在一个凹性点 P。若选取一些边界值使得它们在 P 点充分大而在 P 点的邻域外充分小，则由不等式（10.14）可知解不存在。

这个定理和引理10.3 都是 Finn〔5〕给出的，也可以直接从引理10.2容易构造非可解性的特殊情况。例如，若 D是位于第一象限内的圆环 $r_1<r<r_2$ 的一部分，并且指定了一些连续边界值，这些值在圆$r=r_1$外等于$G(r;\ r_1)$，在圆上某处为正，则根据（10.5）可知解不存在。在非凸区域内解的不存在性问题从 Bernstein〔2〕开始，早已有一些学者进行过研究，但是在每种情形下结论仅对某个特殊区域正确。关于这个问题的详细探讨请见 Nitsche〔6〕。

下面研究更一般的情形，这时解可以有无穷大边界值。首先证明下面的结果，它也是在Finn〔5〕的论文中得出的。

定理10.4 设D是任意的区域，在它的边界上有一个凸性点P。那么在D内极小曲面方程的解在P点不可能趋于无穷大。

证明： 设C是在P点的内切圆。选取一个稍大些的圆并在P点与C相切。如果必要的话，可以假设存在C的一段弧γ，它包含P点而不包含其它的边界点。如果C'是与C同心并充分接近C的较大的圆，那么以γ两个径向线段和C'的弧γ'为边界的区域D'将整个在D内。在D内（10.1）的任一解F，在C的外部D'的边界部分上有有限上界M。于是可以将引理10.3用于区域D'上去，并根据（10.14）可知F在P点不可能趋于无穷大。

上面定理的重要性，在于它指出了极小曲面方程的解确实能够取无穷边界值，甚至沿着整个边界的弧。正如在Scherk曲面

$$F(x_1, x_2)=\log\frac{\cos x_2}{\cos x_1}$$

的情形。它是定义在正方形$|x_1|<\frac{\pi}{2}$，$|x_2|<\frac{\pi}{2}$内，除了在顶点上以外，在每一个边界点处或趋于$+\infty$，或趋于$-\infty$。

显然，如果D是正方形内部任一域，它的边界与正方形的某一边相切，则F是在D内的解，在切点处F趋于无穷。

下面证明附加于定理10.4的一个结果，它指出无穷边界值不可能出现在整个凸弧上。

定理10.5 设D是平面域，γ是D的一条边界弧，L是联

结y端点的线段。若y和L构成了D的子域D′的边界，则在D内，极小曲面方程没有一个解能在γ的每一点处趋于无穷大。

证明：设P是D′的一个点，C是通过P点和L的端点的圆。那么存在着D′的子域D″，它是在C的外边并界于y和C之间的那一部分。若F是极小曲面方程在D内的解，它在y的每一点处趋于无穷。则将引理10.2用到$-F$上就会得出在D″内$F\equiv\infty$的结论，而这是不可能的。

结合定理10.4和定理10.5可得下面结果：

若极小曲面方程的解沿着整个边界弧趋于无穷，则那条弧就是直线段。

于是就引起了这样的问题：沿着边界上已给线段是否能解具有无穷边界值的狄里克雷问题？Finn〔4〕的论文中已包含了定理10.5，并证明了下面的结论：

设D是边界包含一直线段L的凸域，在这个边界的其余部分上任意指定了连续边界值，那么在D内，存在着极小曲面方程的解，它取这些边界值并在L的每一个内点处，这个解趋于无穷。

最近，由H·Jenkins和J·Serrin〔1，2〕对具有无穷边界值的狄利克雷问题作了详细的研究。他给出了在给定的三条边界弧集合上分别连续且取预先给定的正、负无穷边界值的极小曲面方程解的存在性和唯一性的充要条件。关于这个结果的一个例子是：设D是凸四边形，又设一对对边的全长为L，另一对对边的全长为M。在D内存在着极小曲面方程的解，它在一对对边上取边界值$+\infty$，在另一对对边上取边界值$-\infty$的充要条件是$L=M$。当这个解存在时，在附加一个常数后是唯一的。

§ 11 关于非参数问题参数方法的应用

我们举几个例子以结束对E^3内极小曲面的讨论，这些例子说明关于极小曲面方程的解最终总可以用相应的参数形式的曲面方程来表示。

定理11.1 设$X_3=F(x_1, x_2)$是在圆盘D：$X_1^2+X_2^2<R^2$内定义的一个极小曲面，又设P是该曲面上的一点，以后将把它取为原点，K是这个曲面在P点的高斯曲率，d是从P点沿曲面到边界的距离，则以下不等式成立：

$$|K| \leqslant \frac{C}{d^2 W_0^2}, \tag{11.1}$$

其中C是绝对常数，W_0是

$$W^2 = 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2$$

在原点的值。

注：不等式（11.1）也可用方程（10.1）在圆盘D内的任意解的二阶导数在原点处的有界形式来表示。

证明： 用$X(\zeta)$，$|\zeta|<1$，这种参数形式表示曲面，取曲面的单位法向量为：

$$N=\left(\frac{p}{W}, \frac{q}{W}, -\frac{1}{W}\right), \qquad P=\frac{\partial F}{\partial X_1}, \qquad q=\frac{\partial F}{\partial X_2}$$

以确定曲面的定向。利用表达式（8.2）并由（8.8）则可得

$$|g(\zeta)|^2=\frac{W-1}{W+1}<1\ . \qquad (11.2)$$

如果C是$|\zeta|<1$内的任意一条曲线，依（8.7），它在曲面上的像的长度由下式给出

$$\int_c \lambda|d\zeta|=\frac{1}{2}\int_c |f|(1+|g|^2)|d\zeta|\leqslant\int_c |f||d\zeta|.$$

特别是，如果在$|\zeta|<1$内研究所有从原点出发的发散路径C，则有

$$d=\inf_C\int_C \lambda|d\zeta|\leqslant\int_{C_1}|f(\zeta)||d\zeta|, \qquad (11.3)$$

其中C_1是一条特殊的路径，取路径C_1如下：令$W=G(\zeta)=\int f(\zeta)d\zeta$，其中$G(0)=0$。则根据引理8.2可知在$|\zeta|<1$内$G'(\zeta)=f(\zeta)\neq 0$，再根据引理8.5的理论，定义在原点邻域内的反函数$\zeta=H(W)$在最大圆盘$|W|<P$上将被确定，在这个圆盘的边界上存在一点W_0，而此反函数不能扩充到各个点。半径L：$W(t)=tW_0$，$0\leqslant t<1$将映射为在$|\zeta|<1$内起点在原点的那条发散路径C_1。但是

$$\int_{C1}|f(\zeta)||d\zeta|=\int_L |dw|=\rho. \qquad (11.4)$$

将Schwarz引理用于由$|W|<\rho$到$|\zeta|<1$的映射$H(w)$上去，则有$|H'(0)|\leqslant 1/\rho$，于是$|f(0)|=|G'(0)|=1/|H'(0)|\geqslant\rho$。比较（11.3）和（11.4）则得

$$d\leqslant|f(0)| \qquad (11.5)$$

其次再把许瓦兹引理用于由$|\zeta|<1$到$|g(\zeta)|<1$的映射$g(\zeta)$

上去，又得到

$$|g'(0)|\leqslant 1-|g(0)|^2 \tag{11.6}$$

最后综合（11.2），（11.5），（11.6）和高斯曲率表达式（9.4）可求得

$$\sqrt{|K|}d\leqslant\frac{4|g'(0)|}{(1+|g(0)|^2)^2}\leqslant\frac{4(1-|g(0)|^2)}{(1+|g(0)|^2)^2}$$

$$=\frac{2}{W_0}\left(1+\frac{1}{W_0}\right)\leqslant\frac{4}{W_0}$$

于是证得了这个定理。

推论*在与定理相同的假设之下，则存在一个绝对常数C_0使得

$$|K|\leqslant\frac{C_0}{R^2} \tag{11.7}$$

证明：显然$d\geqslant R$，并且$W_0\geqslant 1$。

让我们注意，不等式（11.1）和（11.7）都可看作是Bernstein定理的定量形式，即如果$F(x_1, x_2)$被定义在整个平面(x_1, x_2)上，那么关于任一点可选取为圆心。一个有任意大半径R的圆盘，而且从（11.7）可见，这种曲面的高斯曲率恒等于零。作为极小曲面还可以推出它一定是平面。这个典型例子的最初结果是由Heinz〔1〕给出的，在那里，他得出了不等式（11.7）。以后E·Hopf〔1〕又加强了这个结果，他给出了另一个不同的证明，并发现可以在分母中加上一个因子W^2。

不等式（11.1）是出现在Osserman〔2〕中，它的好处是，当把圆盘D用(x_1, x_2)平面内的任意区域代替时(11.1)

* 见附录3，2，6 I B和6 I A，

仍然正确。关于常数C，可以证明：如果这曲面在原点有水平切平面时，则$W_0=1$并且

$$|K|\leqslant\frac{64}{9}\quad\frac{1}{d^2}。$$

此外，这个不等式是加强了，当曲面是恩纳伯曲面时取等号，在这种情况下区域D不再是圆盘。通过把上面已给的论证作一番精心地改进还能够证明（11.1）中的C满足

$$\frac{64}{9}\leqslant C<8,$$

这个结果是在Osserman〔2〕的论文中得到的。

利用纯参数法Finn和Ossermann〔1〕对不等式（11.7）给出了一种完全不同的证明方法。在那里他们证明了如果在原点曲面有水平切平面，则

$$|K|<\frac{\pi^2}{2}\quad\frac{1}{R^2},$$

这个不等式是最好的结果，其中Sherk曲面起着极值的作用，他们还证明了（11.7）中的常数C_0满足

$$\frac{\pi^2}{2}\leqslant C_0<6$$

这些看法显然是针对下面的问题。

问题：在（11.1）和（11.7）中的常数C和C_0的精确值是什么？对于W的已知值能描述出关于这些不等式的极值曲面吗？

下面转向求在圆盘外部定义的极小曲面方程的解。首先注意由Bers〔1〕得出的以下结果。

定理11.2 设$X_3=F(x_1, x_2)$是在区域$x_1^2+x_2^2>R^2$内

确定的一个极小曲面，那么F 的梯度在无穷远处趋于一个极限。

证明：这样的曲面的法向量被包含在一个半球面内，而在曲面上发散于无穷的所有曲线的长度显然是无穷的，从定理9.5可见法向量在无穷远处趋于一个极限，这就是要证的结果。

事实上，关于解$F(x_1, x_2)$在无穷远邻域内的变化，Bers得到了精确得多的结果。为此目的，他利用了类似于(8.2)的参数表示和下面引理。

引理11.1 设$X_3=F(x_1, x_2)$在区域$x_1^2+x_2^2>R^2$内确定了一个极小曲面S。则S共形等价于有孔的圆盘：$0<|\zeta|<1$，当$x_1^2+x_2^2$趋于无穷时，ζ趋于零。

证明：这个结果可以用与定理9.5的证明相同的推理去证得。

对于欲想研究的那种曲面在参数形式下的精确条件如下。

引理11.2 设定义在有孔的圆盘△：$0<|\zeta|<1$内的极小曲面S的方程可表示为以下形式：

$$X_k=\mathrm{Re}\int\phi_k(\zeta)d\zeta, \tag{11.8}$$

其中

$$\phi_1=\frac{1}{2}f(-g^2),\phi_2=\frac{i}{2}f(1+g^2),\phi_3=fg, \tag{11.9}$$

则下面两个论述是等价的：

Ⅰ. 存在$\rho>0$使得对应于$0<|\zeta|<\rho$的那部分曲面S能以$X_3=F(x_1, x_2)$形式解出，其中$F(x_1, x_2)$是在某条约当曲线Γ外部极小曲面方程的有界解。

Ⅱ. 存在$\rho'>0$，使得在有孔圆盘Δ'：$0<|\zeta|<\rho'$内，$f(\zeta)$，$g(\zeta)$为解析函数并有以下性质：

a) 在$|\zeta|<\rho'$内$g(\zeta)$扩展成解析函数，并且满足$|g(\zeta)|<1$，$g(0)=0$，$g'(0)=0$。

b) 在Δ'内$f(\zeta)\neq 0$，并且在原点处，$f(\zeta)$有一个残数为零的二阶极点。

证明：Ⅰ⇒Ⅱ。设$\rho'=\rho$，非参数形式的曲面必须是正则曲面，并满足条件$|g|<1$，因此由引理8.2可知函数$f\neq 0$。因为在有孔的圆盘内，g是有界解析函数，它在原点有一个可去奇异点。所以$g(0)$的值就确定了在无穷远处梯度的极限状态；如果$g(0)\neq 0$，那么根据（11.2），梯度应趋于非零极限，$F(x_1, x_2)$就不是有界函数，因此$g(0)=0$。此外在无穷远处$X_3=F(x_1, x_2)$有界的意思是指在原点的邻域内X_3是ζ的有界调和函数，因此也有一个可去奇异点。于是

$$f(\zeta)g(\zeta)=\phi_3(\zeta)=\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2},\quad \zeta=\xi_1+i\xi_2,$$

在整个圆盘内是解析函数，同样函数$f(\zeta)g^2(\zeta)$在整个圆盘内也是解析的。由此，首先可以看出f在原点处不能有本性奇异点，而且从（11.8）和（11.9）又有

$$x_1=ix_2=\frac{1}{2}\{\overline{\int f d\zeta}-\int f g^2 d\zeta\},\qquad (11.10)$$

由此可以推得在原点处f必有残数为零，以便使x_1和x_2为ζ的单值函数。另一方面，在原点处f又不可能是正则的，因为否则x_1，x_2就成为有界的了，于是f至少有二阶极点，并由$f\cdot g$在原点处解析就可推出g有二重零点；即$g'(0)=0$。最后，必须证明$f(\zeta)$不可能有大于二阶的极点。但要注意(11.10)

又可写成

$$x_1+ix_2=\frac{1}{2}\{\overline{H(\zeta)}-G(\zeta)\}, \qquad (11.11)$$

其中

$$H(\zeta)=\int f(\zeta)d\zeta,$$

$$G(\zeta)=\int f(\zeta)g^2(\zeta)d\zeta, \qquad (11.12)$$

是$\triangle'$内的单值解析函数。如果$f(\zeta)$有大于二阶的极点，那么$H(\zeta)$就有大于一阶的极点，并且对于所有较小的ε，$|\zeta|=\varepsilon$的像不至一次的缠绕在原点。但是，对于较小的数ε，在$|\zeta|=\varepsilon$上$|H(\zeta)|>|G(\zeta)|$，于是在x_1，x_2平面上$|\zeta|=\varepsilon$的像缠绕原点的次数也大于1。而这就与当$0<|\zeta|<\rho$时，映射$\zeta\to(x_1, x_2)$是一一映射这个事实相矛盾，结论被证得。

Ⅱ⇒Ⅰ。条件a）和b)保证了(11.12)定义的函数$G(\zeta)$，$H(\zeta)$在$\triangle'$内是单值的，在原点处$G(\zeta)$还是解析的，而且函数$H(\zeta)$仅有一个单极点。于是由(11.11)，当ζ趋于零时，x_1+ix_2趋于无穷。映射（11.11）的雅可比行列式的表达式为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)}=\mathrm{Im}\{\phi_1, \overline{\phi_2}\}$$

$$=\frac{1}{4}|f|^2(|g|^4-1), \qquad (11.13)$$

因为$|g|<1$，则$J<0$处处成立，并且映射（11.11）是局部微分同胚的。我们希望证明对于适当选取的ρ在$0<|\zeta|<\rho$内（11.11）是整体微分同胚的。为此，首先选取$r>0$使得

$H(\zeta)$在$0<|\zeta|\leqslant r$内为单值函数。因为$H(\zeta)$仅仅有一个极点，因此这种选法是可能的。当$|\zeta|\leqslant r$时，令$M=\max|G(\zeta)|$，并选取$r_1\leqslant r$使得当$0<|\zeta|<r_1$时$|H(\zeta)|>M$。当$|\zeta|=r_1$时，令$M_1=\max|x_1+ix_2|$。可断言对于圆周$x_1^2+x_2^2=M_1^2$外部的每一个点，在$0<|\zeta|<r_1$内恰好只出现一次。即，给定任一个这样的点(a_1, a_2)，选取$r_2<r_1$使得当$|\zeta|\leqslant r_2$时有$|H(\zeta)|>2|a_1+ia_2|+M=M_2$。于是在$|\zeta|=r_2$上，$|x_1+ix_2|>|a_1+ia_2|$，并且映射(11.11)是圆环$r_2<|\zeta|<r_1$的局部微分同胚，使得边界的像关于点$(a_1, a_2)$的缠绕数等于1。因此点$(a_1, a_2)$在圆环内恰好有一个原像，而$|\zeta|\leqslant r_2$却没有原像，这就完全证明了这个引理。

引理11.3 设$F(x_1, x_2)$在某个圆$x_1^2+x_2^2=R^2$的外部满足极小曲面方程。若$F(x_1, x_2)$是有界的，则在无穷远处它趋于一个极限，并对适当的常数M，

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}+i\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|\leqslant\frac{M}{x_1^2+x_2^2}\qquad(11.14)$$

在无穷远邻域内成立。

证明： 由引理11.1和引理11.2就能得到表达式(11.8)及(11.9)，其中f和g满足引理11.2中条件Ⅱa)和b)，正如在引理11.2的证明中所指出的那样，当ζ趋于零时，因此也就是$x_1^2+x_2^2$趋于无穷时，x_3趋于一个极限。从表达式(11.11)和G，F的性质立刻可以看出当ζ趋于零时，$|x_1+ix_2||\zeta|$趋于一个有限的极限。最后从(8.8)可以计算

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=\frac{2\mathrm{Re}\{g\}}{1-|g|^2},\qquad\frac{\partial F}{\partial x_2}=\frac{2\mathrm{Im}\{g\}}{1-|g|^2},$$

又因为$g(\zeta)$在原点处有二重零点，所以

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}+i\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|=\frac{2|g|}{1-|g|^2}\leqslant M|\zeta|^2\leqslant\frac{M_1}{|x_1+ix_2|}$$

在无穷远处的邻域内成立。

定理11.3 如果外狄利克雷问题有一个有界解，那么它是唯一解。特别是，如果在区域$x_1^2+x_2^2\geqslant R^2$内，$F(x_1, x_2)$，$\widetilde{F}(x_1, x_2)$是极小曲面方程的有界解，它们在$x_1^2+x_2^2\geqslant R^2$内连续而在$x_1^2+x_2^2=R^2$上相等，则$F(x_1, x_2)\equiv\widetilde{F}(x_1, x_2)$。

证明：在圆环D：$r_1\leqslant r\leqslant r_2$（其中$r_1>R$）上使用和定理10.2的证明中相同的符号，于是就得到了公式(10.12)。但是在这个公式的左端是两个边界的积分。其中一个是绕着外边界的积分，根据（11.4）以及F和$\widetilde{F}$是有界这个事实可知，当r_2趋于无穷时，这个积分趋于零。另一个是在内圆上的积分，当$r_1\to R$时，这个积分也趋于零，这是因为$F-\widetilde{F}$趋于零。而$\phi, \widetilde{\phi}$，$\psi, \widetilde{\psi}$这些量的绝对值均小于1。于是定理10.2的论证说明了F和$\widetilde{F}$有相同的梯度，因此F和$\widetilde{F}$最多差一个常数，而又因为它们在圆上的值相等，所以它们在$x_1^2+x_2^2\geqslant R^2$恒等。

注：上面的证明是由R·Finn提出来的。显然边界不必一定是圆，因为这个论证是相当一般的。这个定理是正确的这一事实是由D·Gilbarg向作著指出的，他还提出外狄利克雷问题的有界解是否总是存在的问题。在下面的定理中要指出这种解不总是存在的。

定理11.4 在圆$x_1^2+x_2^2=1$上，存在着一个连续函数，可以把它取为任意光滑函数(例如，是弧长的实解析函数)，使得在圆的外部极小曲面方程没有有界解在其边界上取这些值。

证明：首先构造一个曲面$\widetilde{S}$，它将起着类似于前节论证中悬链面的作用。通过在（11.9）中，令

$$f(\zeta)=\frac{2}{\zeta^2},\quad g(\zeta)=\zeta^2。\qquad (0<|\zeta|<1)$$

来定义曲面$\widetilde{S}$。于是变换（11.11）就取下面的形式

$$x_1+ix_2=-1/\zeta-\frac{\zeta^3}{3}。\qquad (11.15)$$

容易证明通过变换（11.15），$|\zeta|=1$的像是一条约当曲线Γ，通过与引理11.2的证明的相同的论证法可以看出(11.15)是$0<|\zeta|<$到Γ外部的微分同胚。于是，曲面$\widetilde{S}$在Γ的外部可以表示为非参数形式$x_3=\widetilde{F}(x_1, x_2)$。利用方程$x_3=2\xi_1$容易证明下面的事实：

i）映射（11.15）是把轴映射为轴，对称点映射为对称点；

ii）$\widetilde{F}(x_1, x_2)$关于x_1轴是对称的，关于x_2轴是反称的；当$x_1<0$时$\widetilde{F}(x_1, x_2)>0$，当$x_1>0$时$\widetilde{F}(x_1, x_2)<0$，并在无穷远处它趋于零；

iii）Γ可以用极坐标形式来表示：$r=h(\theta)$，在这里当θ从0增加到$\pi/2$时，r从$4/3$单调减少到$2/3$（Γ的其余部分可通过对称性得到）；

iv）沿Γ，函数$\widetilde{F}$的梯度是无限大。

令C是单位圆$x_1^2+x_2^2=1$并指定在C上的边界值$\phi(x_1, x_2)$满足：

a）ϕ关于x_1轴对称，关于x_2轴反称；

b）在左半平面$x_1<0$内，关于在C上Γ外面的那些点

有 $0<\phi(x_1, x_2)<\widehat{F}(x_1, x_2)$。

现在假设$F(x_1, x_2)$是极小曲面方程在C的外部的有界解并取边界值为$\phi(x_1, x_2)$。那么由ϕ的性质a) 可知，函数$\widehat{F}(x_1, x_2)=-F(-x_1, x_2)$应该是取相同边界值的有界解。并且，由定理11.3，$F(x_1, x_2)\equiv\widehat{F}(x_1, x_2)$。特别是$F(0, x_2)=\widehat{F}(0, x_2)=-F(0, x_2)$，所以$F(0, x_2)\equiv 0$。因此在无穷远处F的极限必须是零。于是对于任意$\varepsilon>0$，可取充分大的R使得$|F|<\varepsilon$，在$x_1^2+x_2^2=R^2$上$|\widetilde{F}|<\varepsilon$成立。令D是左半平面内这样的区域，它既在圆$x_1^2+x_2^2=R^2$内部又在曲线C和Γ的外部。在垂直轴上有$F=\widetilde{F}=0$，在圆$x_1^2+x_2^2=R^2$上有$F<\widetilde{F}+2\varepsilon$，对于Γ外部在C上的点$F=\phi<\widetilde{F}$。于是不等式$F<\widetilde{F}+2\varepsilon$对D的所有边界点（可能除去在Γ上的那些点）是成立的。然而沿Γ函数$\widehat{F}$的梯度是无穷大，而根据引理10.2的相同论证，不等式$F<\widetilde{F}+2\varepsilon$，对于在Γ上的边界点，同样也是成立的。最后如果令D′是左半平面内位于Γ里面和圆C的外面的月牙形状的区域，那么再根据引理10.2，由在Γ上的不等式$F<\widetilde{F}+2\varepsilon$可推出在圆C上在D′部分边界上的$F\leqslant M$的范围。即，如果在C的内部Γ上还没有规定边界值$\phi(x_1, x_2)$，则在某一点可选取$\phi(x_1, x_2)$，使得$\phi>M$，于是外边界问题不可能被解决，这就证明了定理。

用下面一些评述来结束这个讨论。

首先提出这样的问题，若去掉有界性这个要求，是否存在外狄里克雷问题的任意解。然而这就会失去了解的唯一性这个结论，因为既使在圆上取常数边界值，都可以有悬链面

和水平面这两个不同的解。

其次，取圆周作为边界曲线并不特别重要。显然，进行一般性论证是可以做到的，而我们感兴趣的却是关于任一个外部区域的论证。

最后，根据 D·Gilbag 的观察，用一致椭圆型方程理论的标准方法能够证明，如果边界的数据充分小时，外狄里克雷问题的解总是存在的，由于对充分大的边界值的不存在性，则有明显的例子以说明非线性极小曲面方程如何影响它的解的形状。

§12 在E^n内的参数曲面 广义高斯映射

本节将证明，怎样将第 8 节和第9 节的结果推广到E^n内的极小曲面上去。为此目的，必须把古典高斯映射推广到n维空间并研究在n维空间内极小曲面的高斯映射的性质。最初是由Pinl〔1〕对$n=4$的情况作了推广。但是要注意，Pinl 也得到了关于E^n内参数极小曲面的一些结果，而这些结果可见pinl〔2,3〕以及参考 Beckenbach〔1〕和 Jonker〔1〕的论文。Chern〔1〕首先研究了关于 n 维极小曲面的高斯映射。而本节主要是研究 Chern 论文中一些结果和 Osserman〔5〕和 Chern与Osserman〔1〕的论文所提出的一些结果。

下面将从讨论格拉斯曼（Grassmannian）$G_{2,n}$开始，这是一个微分流形，它的点与E^n中所有定向的二维线性子空间构成的集合的元素一一对应；即与过原点的所有定向平

面一一对应。设Π是这些平面中的任一个，V，W是平面Π上一对等长正交向量，并按V到W的顺序规定Π的定向。于是，若令$Z_k=V_k+iW_k$，$k=1, 2, \cdots, n$，就可得到一个映射：

$$V, W \to Z \in C^n \tag{12.1}$$

再假设V′，W′是张成Π的另一对这种向量，Z′是经过映射（12.1）而得到它们的像。于是容易证明，存在一个复常数C，使得对任意的K均有$Z'_k=CZ_k$成立。于是，映射(12.1)又诱导了一个映射

$$\Pi \to Z \in P^{n-1}(c)。\tag{12.2}$$

这个映射把每个平面Π映射为$(n-1)$维复射影空间内的一个点。此外它还满足

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k^2 = \sum V_k^2 - \sum W_k^2 - 2i\sum V_k W_k = 0 .$$

于是，若引进复的超二次曲面

$$Q_{n-2} = \left\{ Z \in P^{n-1}(c): \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k^2 = 0 \right\}, \tag{12.3}$$

映射（12.2）实际上还可取以下形式

$$\Pi \to Z \in Q_{n-2} \subset P^{n-1}(c)。\tag{12.4}$$

反之，对任一点$Z \in Q_{n-2}$，如果记$Z_k=V_k+iW_k$。那么向量V，W所张成的平面Π就对应于Z点。于是看出映射（12.4）在所有平面Π和Q_{n-2}的所有点之间建立了一一对应。因此Q_{n-2}与格拉斯曼$G_{2,n}$是一致的。

现在，假设映射

$$X(p): M \to E^n \tag{12.5}$$

确定了一个正则C^r级曲面S，其中M是定向的二维流形。那么在M的每一点P处都有一个切平面$\Pi(p)$。藉助于局部参数u_1，u_2可确定由向量$\partial x/\partial u_1$，$\partial x/\partial u_2$所张成的平面並且它与参数选取无关。于是通过映射（12.4）可确定点$Z(p)$，则称复合映射

$$g: S \to Q_{n-2} \tag{12.6}$$

其中

$$g: X(p) \to \Pi(p) \leftrightarrow Z(p) \tag{12.7}$$

为曲面S的广义高斯映射。当取$n=3$时，定向平面Π和它们的单位法向量N之间是一一对应的，Q_1的点和通过令$W=Z_3/(Z_1-iZ_2)$并再作球极射影所得到的单位球上的点之间也是一一对应的，因此映射（12.7）也就是经典的高斯映射：$X(p) \to N(p)$。今后将任意n维的高斯映射（12.7）简称为"高斯映射"。

下面研究浸入（12.5），它确定了M上的一个自然共形结构，其中在M上的局部参数是能使在S上成为等温参数。

引理12.1 由（12.5）所定义的曲面S为一个极小曲面的充要条件是高斯映射（12.7）是反解析的。

证明：*曲面S在任一点的邻域内可用等温参数$\zeta=\xi_1+\xi_2$表示为$X(\zeta)$。$\partial X/\partial\xi_1$，$\partial X/\partial\xi_2$是正交等长向量并张成

---

* 此证明不完全，关于它的讨论及完全的证明见Hoffman和Osserman〔1〕的P.7—10.

了切平面。于是可以通过令

$$Z_k = \frac{\partial X_k}{\partial \xi_1} + i\frac{\partial X_k}{\partial \xi_2} = \overline{\phi_k(\zeta)} \tag{12.8}$$

来定义高斯映射。由引理4.2则有：

S 为极小曲面$\Leftrightarrow x_k$是调和函数$\Leftrightarrow \overline{Z_k}$在$\zeta$内解析。

引理12.2 E^n内的曲面S为平面的充要条件是它在高斯映射下之像缩成一点。

证明： 曲面S在高斯映射下的像缩成一点的充要条件是切向量$\partial X/\partial u_1$，$\partial X/\partial u_2$可表示成两个固定向量V, W的线性组合，这又等价于对任意P点和一固定点P_0，$X(p)-X(P_0)$可表示成V，W的线性组合。

定理12.1* 设S是E^n内的完备正则极小曲面。那么S或者是平面或者在高斯映射下S的像任意的接近$P^{n-1}(c)$中的每一个超平面。

证明： 首先讨论S的万有覆盖面$\widehat{S}$，这样做既不影响假设也不影响结论。假设在高斯映射下的像不能达到任意地接近某个确定的超平面$\Sigma a_k Z_k = 0$。这表明只要在像上就处处都有

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k Z_k\right|^2}{\sum_{k=1}^{n}\left|Z_k\right|^2} \geqslant \varepsilon > 0 . \tag{12.9}$$

设$\widehat{S}$是由$X(\zeta)$：$D \to E^n$所定义的，其中D可以是单位圆盘也可以是整个ζ平面。于是在（12.8）的记号中，不等式

* 见附录3，4。

(12.9) 可取以下形式

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\phi_k(\zeta)\right|^2\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left|\psi(\zeta)\right|^2, \qquad (12.10)$$

其中 $\psi(\zeta)=\sum\overline{a_k}\phi_k(\zeta)$是 D内非零解析函数。而$\widehat{S}$上的度量是由 $g_{ij}=\lambda^2\delta_{ij}$给出的，其中$\lambda^2=\frac{1}{2}\sum|\phi_k(\zeta)|^2$，并且根据 (12.10) 可知$\log\lambda$在 D 内有强调和函数。因为$\widehat{S}$是完备的，由引理9.2可见 D 不可能是单位圆盘，它必须是整个平面。可是，从 (12.10) 可见，每个函数$\phi_k(\zeta)/\psi(\zeta)$必为有界整函数，因此是常数。于是在高斯映射下$\widehat{S}$的像缩成一点。又根据引理12.2知$\widehat{S}$位于一个平面内并且是完备的。所以$\widehat{S}$与平面一致。

推论：在E^n内完备正则极小曲面S的法向量（除 S 是平面外）处处稠密。

证明：假定曲面 S的法向量与某个确定的单位向量$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$所构成的角中最小的角为$\alpha$，，可证明它等价于以下不等式

$$\frac{|\sum\lambda_k Z_k|^2}{\sum|Z_k|^2}\geqslant\frac{1}{2}\sin^2\alpha, \qquad (12.11)$$

这表明在高斯映射下 S的像不在超平面 $\sum\lambda_k Z_k=0$ 上而且是有界的。这个结果可从定理12.1得到。为得到不等式(12.11)只须取一对正交单位向量V，W。它们在一点张成切平面，再把λ分解成$\lambda=aV+bW+N$，其中 N 是在这点的法向量。如果ω是N与λ间的交角，于是由$\lambda\cdot N=|N|^2$则有

$$\begin{aligned}(\lambda\cdot N)^2+(\lambda\cdot W)^2&=a^2+b^2=1-|N|^2\\&=1-\cos^2\omega\geqslant1-\cos^2\alpha\end{aligned}$$

这恰好是（12.11），其中$Z_k=V_k+iW_k$。

上述定理和它的推论可看成是解决下面基本问题的第一步：

1．描绘E^n内任意完备极小曲面的高斯映射的形状。

2．建立这种形状与曲面本身几何性质间的联系。

在第8节和第9节中，已经给出了当$n=3$时这类问题的一些结果。现在再简单地研究关于任意n维的情形。首先给出下面的定义。

定义 若高斯映射的像位于一个超平面上则称高斯映射是退化的。

引理12.3 设S是E^n内的极小曲面，在高斯映射下它的像位于一个超平面

$$H: \sum a_k Z_k=0 \tag{12.12}$$

上。

若H是"实的"超平面即a_k是实数，则S本身就位于E^n的超平面上。

若H是Q_{n-2}的切超平面，即

$$\sum a_k^2=0, \tag{12.13}$$

则在E^n内存在一个坐标变换，譬如$X_j=\sum b_{jk}\widetilde{X}_k$，其中$B=(b_{jk})$是正交矩阵，使得$\widetilde{X}_1+i\widetilde{X}_2$为S上的解析函数。

证明：在第一种情形a_k是实数的情况下，可以把方程(12.12)简单地说成是切向量V和W都与向量$a=(a_1,\cdots,a_n)$正交，其中$Z_k=V_k+iW_k$。通过积分可知这个曲面位于正交于a的超平面内。

在第二种情形下，若令$a_k=\alpha_k+i\beta_k$，向量α和β是等长

正交实向量，由（12.13）还可假设它们是单位向量。于是可以把它们变成一组正交的向量，利用这些向量作成矩阵 B 的列。因此如果用局部等温参数引进函数ϕ_k，方程(12.12)就可以取以下形式

$$0=\sum\overline{a_j}\phi_j=\sum\overline{a_j}b_{jk}\overline{\phi_k}=\overline{\phi_1}-i\overline{\phi_2}。$$

而这恰好就是关于函数$\overline{X_1}+i\overline{X_2}$的柯西——黎曼方程。这就证明了此引理。

让我们进一步讨论引理中已提出的下面两种情形：对于第一种情形，可以作一个正交坐标变换，使得S位于一个超平面$\widetilde{X_1}=\text{Const}$内或等价于$\widetilde{\phi_1}\equiv 0$。对于第二种情形，则$\widetilde{\phi_1}=i\widetilde{\phi_2}$或$\widetilde{\phi}_1^2+\widetilde{\phi}_2^2\equiv 0$。在一般情形下，可得出下面的定义。

定义 若选取适当的坐标，

$$\sum_{k=1}^{m}\phi_k^2(\zeta)\equiv 0,\quad（当m<n时）, \qquad (12.14)$$

则称E^n内的极小曲面是可分解的。

注意由方程（12.14）也可推出

$$\sum_{k=m+1}^{n}\phi_k^2(\zeta)\equiv 0 .$$

这表明如果把E^n写成$E^n=E^m\oplus E^{n-m}$，那么曲面在每一个子空间上的射影还是极小曲面。既使它们当中的某一个可以退化成常映射。特别是用这种方法总可以通过低维空间的一对极小曲面去作出高维空间的极小曲面。作为一个特殊情况，如果

$$X_1+iX_2,\ X_3+iX_4,\ \cdots,\ X_{n-1}+iX_n,$$

是变量ζ的解析函数，其中n是偶数。于是曲面$X(\zeta)$在E^n中是一个（可分解的）极小曲面。在第2节末给出的例子就是关于这个问题的一种解释。

引理12.4 关于E^3内的极小曲面S，下面条件是等价的：

a）S是可分解的；

b）S的高斯映射是退化的；

c）S在一平面上。

证明： 显然a）等价于c），因为如果S是可分解的，或$m=1$或$m=2$。在这两种情形下，或$\phi_1\equiv 0$或$\phi_3\equiv 0$。如果高斯映射是退化的，那么S的像位于$P^2(c)$的超平面H上并且在二次曲面Q_1内。但是容易证实$H\cap Q_1$是由一个点或由两个点组成，又因为这个像是连通的，所以它必须缩成一点，由引理12.2知S位于一个平面内。

如果转到高维情形去研究，那么引理12.4的这些条件中任意两个都不等价，既使通过很自然地推广成"S位于超平面上"以代替条件c），它们之间也是不等价的。我们已经看出后一条件对应于曲面是退化的或可分解的这两种特殊类型。至于前两个条件的不等价性在第5节末给出的$\phi_2=-2i\phi_1$的曲面就是一个例子，虽然它的高斯映射是退化的，而我们容易证明它是不可分解的。

在上面的讨论中和证明定理12.1中的条件（12.9）一样可藉助于$P^{n-1}(c)$的某些子集上的像来描述高斯映射。因此在许多场合中很自然地要描绘$P^{n-1}(c)$中与高斯像相交的超平面集合的特征。例如容易证明方程（12.9）等价于下面的论述："在高斯映射下的像不与充分接近超平面$\Sigma a_k Z_k=0$的任一超平面相交"。于是定理12.1可以重新叙述为："若S是

一个非平面的完备极小曲面，则在高斯映射下它的像与超平面的一个稠密集相交。"*

为了用这种观点更进一步研究高斯映射，要注意下面的引理。

引理12.5 已知E^n内一个极小曲面S，它的高斯映射是g(s)和$P^{n-1}(c)$中的一个超平面H，那么或者g(s)位于H内，或H与g(s)在一个有固定重数的弧立点处相交。

证明： 若H是由方程$\Sigma a_k Z_k = 0$确定的，则在S的任一点的邻近选取局部等温参数ζ，并令$\psi(\zeta)=\Sigma \overline{a_k \phi_k(\zeta)}$。于是，当$\psi(\zeta)\equiv 0$时，g(s)局部的在H内，并由解析性，它也是整体地在H内。否则g(ζ)有多重孤立零点，它的多重数与参数ζ选取无关。

这样一来就导至将去研究"亚纯曲线"g(s)，它正是在Weyl〔1〕书中详细讨论的那类课题。在$P^{n-1}(c)$上引进一种黎曼度量，这对研究一般理论，特别是对应用是很有用的。可通过下面表达式：

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2\frac{|Z(t)\wedge Z'(t)|^2}{|Z(t)|^4}$$

$$= 2\frac{\sum\limits_{j<k}|Z_j Z_k' - Z_k Z_j'|^2}{(\sum|Z_k|^2)^2} \qquad (12.15)$$

来确定可微分曲线Z(t)的弧长元素dσ，最多将（12.15）乘一个因子，它就是复射影空间的标准度量。

假设有一个极小曲面S，在用局部等温参数ζ时，它的方程为$Z_k=\overline{\phi_k(\zeta)}$。于是（12.15）就变成以下形式：

---

* 见附录3，4。

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2=\widetilde{\lambda}^2\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2 \tag{12.16}$$

其中

$$\widetilde{\lambda}=\sqrt{2}\frac{|\phi(\zeta)\wedge\phi'(\zeta)|}{|\phi(\zeta)|^2}. \tag{12.17}$$

特别是，关于这个度量在ζ平面内的区域△的像的面积为：

$$\widetilde{A}=2\iint_{\Delta}\frac{|\phi\wedge\phi'|^2}{|\phi|^4}d\xi_1 d\xi_2。 \tag{12.18}$$

其次计算高斯曲率，把曲面S上的度量：

$$\frac{ds}{dt}=\lambda\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|;\quad \lambda^2=\frac{1}{2}|\phi(\zeta)|^2 \tag{12.19}$$

用于公式(9.5)：$K=-\Delta\log\lambda/\lambda^2$上去就得出下面的表达式

$$K=-\frac{4|\phi\wedge\phi'|^2}{|\phi|^6}=-\frac{\widetilde{\lambda}^2}{\lambda^2}. \tag{12.20}$$

特别是通过全曲率，又可求得

$$\iint K dA=\iint_{\Delta}K\lambda^2 d\xi_1 d\xi_2=-\iint_{\Delta}\widetilde{\lambda}^2 d\xi_1 d\xi_2=-\widetilde{A}.$$

换句话说：曲面任意部分的全曲率关于度量（12.15）是像的面积的负值。

于是可以把三维空间的公式(9.11)作更严格地推广，并可以研究在这样推广下各种定理的推导形式。积分几何学的方法能把高斯映射下的像与各种超平面相交的次数与像的面积联系起来，也就是与曲面的全曲率联系起来，在这里我们不做详细地讨论，有兴趣的读者可参考Chern和Osserman〔1〕论文中的讨论。

附 录 1

定 理 一 览 表

定理5.1 设$f(x_1,x_2)=(f_3(x_1,x_2),\cdots,f_n(x_1,x_2))$是极小曲面方程（2.8）在整个$x_1$，$x_2$平面内的一个解，则存在非奇异线性变换$x_1=u_1$，$x_2=au_1+bu_2$，$b>0$，使得（$u_1$，$u_2$）是由$x_k=f_k(x_1,x_2),k=3,\cdots,n$，所定义的曲面S的（整体）等温参数。

推论 1 当$n=3$时，在整个x_1，x_2平面内极小曲面方程只有平凡解，而且f是x_1，x_2的线性函数。

推论 2 在整个平面内，方程（2.8）的有界解必须是常数。（对于任意的n）。

推论 3 设$f(x_1, x_2)$是方程（2.8）在整个平面内的解，并设由$x_k=\widetilde{f}_k(u_1, u_2)$，$k=3,\cdots,n$，定义的曲面$\widetilde{S}$，它是通过把曲面S用定理5.1所给的等温参数表示后而得到的。则函数

$$\widetilde{\phi}_k=\frac{\partial \widetilde{f}_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial \widetilde{f}_k}{\partial u_2},\ k=3,\cdots,n,$$

在整个u_1，u_2平面内是u_1+iu_2的解析函数，並且满足

$$\sum_{k=3}^{n}\widetilde{\phi}_k^2\equiv-1-c^2。c=a-ib。$$

反之，已知任一复常数$c=a-ib$，其中$b>0$，以及已

知满足上面方程的 u_1+iu_2 的整函数 $\widetilde{\phi}_3,\cdots,\widetilde{\phi}_n$，可以把这些函数用于确定在整个 x_1，x_2 平面内极小曲面方程（2.8）的一个解。

定理7.1 设 Γ 是 E^n 内任一条约当曲线，则存在以 Γ 为边界的单连通广义极小曲面。

定理7.2 设D是 (x_1, x_2) 平面内的有界凸域，C是它的边界曲线。并设 $g_k(x_1, x_2)$，$k=3,\cdots,n$，是C上的任意连续函数，那么在D内存在极小曲面方程（2.8）的一个解 $f(x_1, x_2)=(f_3(x_1,x_2),\cdots,f_n(x_1,x_2))$，使得 $f_k(x_1, x_2)$ 在边界上取值为 $g_k(x_1, x_2)$。

定理8.1 设S是 E^3 的完备正则极小曲面，则S或是一个平面或者它的法向量处处稠密。

定理8.2 设S是 E^3 的一个完备正则极小曲面，则S或者是平面或者S在高斯映射下像的余集E有对数容量零。

定理8.3 设E是单位球面上任意K个点的集合，其中 $K\leqslant 4$，那么在 E^3 内存在一个完备正则极小曲面，它在高斯映射下像的余集恰好是E。

定理9.1 设M是完备二维黎曼流形，它的高斯曲率满足 $K\leqslant 0$，$\iint_M |K|dA<\infty$。那么存在一个紧致二维流形 $\widetilde{M}$ 及它上面的有限个点 $P_1,\cdots,P_k$ 并且M与 $\widetilde{M}-\{P_1,\cdots,P_k\}$ 是等距的。

定理9.2 设S是 E^3 内的完备极小曲面，则或者 $\iint_S KdA=-\infty$，或者 $\iint_S KdA=-4\pi m$，$m=0, 1, 2, \cdots$。

定理9.3 设S是E^3的完备正则极小曲面，则$\iint\limits_S KAd \leqslant 2\pi(\chi-K)$，其中$\chi$是S的欧拉示性数，K是S的边界分支数。

定理9.4 在E^3内只存在两个全曲率为-4π的完备正则极小曲面，它们是悬链面和恩纳伯曲面。

推论 在E^3中恩纳伯曲面和悬链面是唯一的高斯映射是一对一的完备正则极小曲面。

定理9.5 设S是E^3中正则极小曲面并假设在曲面S上所有趋于S的某个孤立边界分支的曲面上的所有路径有无限长则或者S的法向量在边界分支处趋于单一极限或者在S的边界分支的每个邻域内S的法向量取所有方向；最多除去容量为零的集。

定理10.1 设$F(x_1, x_2)$是极小曲面方程（10.1）在有界域D内的解。假设D的每个边界点(a_1, a_2)，可能有有限数目点例外，关系式

$$\overline{\lim_{(x_1, x_2)\to(a_1, a_2)}} F(x_1, x_2)\leqslant M,$$

$$\underline{\lim_{(x_1, x_2)\to(a_1, a_2)}} F(x_1, x_2)\geqslant m$$

成立。则在整个域D上有$m\leqslant F(x_1, x_2)\leqslant M$。

定理10.2 一个极小曲面方程的解不可能有孤立奇点。

定理10.3 设D是有界的平面域，D为凸域的充要条件是在D内存在着极小曲面方程（10.1）的一个解，此解在边界上取任意选定的连续值。

定理10.4 设D是任意域，在它的边界上有一个凹性点

P，那么，在D内极小曲面方程的解在P点不可能趋于无穷大。

定理10.5 设D是平面域，γ是D的一条边界弧，L是联结γ端点的线段，如果γ和L构成D的子域D′的边界，那么在D内，极小曲面方程没有一个解能在γ的每一点处趋于无穷大。

定理11.1 设$X_3=F(x_1,x_2)$是在圆盘D：$x_1^2+x_2^2<R^2$内定义的一个极小曲面。设P是该曲面上对应于圆心的点，K是这个曲面在P点的高斯曲率，d是从P点沿曲面到边界的距离，那么不等式$|K|\leqslant c/d^2w_0^2$成立，其中C是绝对常数，w_0^2是$w^2=1+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2$在原点的值。

推论 在与定理相同的假设下，存在一个绝对常数C_0使得$|K|\leqslant C_0/R^2$。

定理11.2 设$X_3=F(x_1, x_2)$是在区域$x_1^2+x_2^2>R^2$内确定的一个极小曲面，那么F的梯度在无穷远处趋于一个极限。

定理11.3 若外狄里克雷问题有一个有界解，则这个解是唯一的。

定理11.4 在圆$x_1^2+x_2^2=1$上，存在着一个连续函数，可以把它取为任意光滑函数使得在圆的外部极小曲面方程没有有界解在其边界上取这些值。

定理12.1 设S是E^n内的一个完备正则极小曲面。那么S或者是平面或者是在高斯映射下S的像任意接近$P^{n-1}(c)$中的每一个超平面。

推论 在E^n内完备正则极小曲面S的法向量（除S是平面外）处处稠密。

附 录 2

推 广

极小曲面理论在历史上所起的重要作用之一在于它促使去得到一些更一般的结果。以下，我们将对已研究过的理论的某些推广作一篇简要说明，並把这些结果分成以下几类：

I　E^3内更广的曲面类

A．常平均曲率曲面

从几何观点来看，很自然地可把E^3内满足条件$H\equiv 0$的曲面推广成满足条件$H\equiv C$的曲面，某些性质可以推广到这类曲面，而另外一些性质却根据$C=0$或$C\neq 0$是完全不同的。

我们从Plateau问题开始着手研究。定理7.1最初是由Heinz〔2〕扩充的。他指出了在一般情形下，仅当平均曲率与曲线Γ的尺寸相比较不太大时，总希望能得到一个解。（也可见下面关于非参数情形的讨论）。后来Werner〔1〕把Heing的这个结果作了改进。特别是Werner得到下面的结界：设Γ是位于单位球面上的约当曲线，则对于任意值$C(|C|<\frac{1}{2})$，存在满足条件$H\equiv C$并以Γ为边界的单连通曲面，Klotz和Osserman〔1〕用类似于第8节的方法研究了常平均曲率的完备曲面，并证明了下面的结果：设S是完备的常平均曲率的曲面，如果在S上$K\geqslant 0$，则S是平面，球面，或直圆柱面。如果$K\leqslant 0$，则S是柱面或极小曲面。如果对于高斯曲率K的符号不加以限制，则存在着不属于上述类型的常平均曲率的完备曲面。

关于非参数曲面，首先可得下面的结果，此结果可看作是Bernstein定理的自然推广。设$X_3=F(x_1, x_2)$是定义在圆盘$x_1^2+x_2^2<R^2$内的一个常平均曲率$H=C>0$的曲面，则$R\leqslant\frac{1}{C}$，而且等号仅当曲面是半球面时成立。此结论的第一部分是由Bernstein〔1〕得到的。第二部分是由Finn〔5〕得到的。可去奇异点的Bers定理（定理10.2）对常中曲率曲面仍然成立（Finn〔1〕），其理由是因为每一个线性豪斯道夫测度等于零的集合是可去的（Serrin〔2〕）。最后对应于定理10.3有一个存在定理（见下面的ⅡB）。

B. 拟极小曲面

在以偏微分方程的观点研究非参数形式的极小曲面时，人们就想求得对于更一般方程其解呈现出类似的形式。为了得到像Bernstein定理和Bers的定理10.2，定理11.2那样结果的一般化，Bers〔3〕和Finn〔2〕研究了各种类型的方程。他们的基本想法是，在某些要点用拟共形映射代替共形映射。特别是，Finn引进了一类“极小曲面型”的方程，这些方程的解具有这样的性质，它们的高斯映射是拟共形的。加上各种限制这些方程已被Finn〔2,3,4〕，Jenkins〔1,2〕和Serrin〔1〕研究过了。*在这些论文中说明已有的大部分极小曲面理论在这里也能通过，事实在他们知道极小曲面的特殊情形以前，某些结果在更广泛的意义下早已被证明了。在这些最有趣的结论中要注意Harnack不等式和Jenkins和Serrin〔1〕的收敛性定理。

如果只要求所研究的参数曲面具有高斯映射是拟共形映射这一性质就能得到Osserman在〔4〕中引进的所谓“拟极小

* 见附录3，6.ⅠB。

曲面”。某些结果，例如定理9.2，对这类一般的曲面仍能成立。Bernstein定理对于拟极小曲面是否正确，被Finn强加的某些附加限制是否确实必要，弄清这些是很有趣的。*

Ⅱ. E^n的超曲面

A. 极小超曲面

从很多观点来看，在E^3内曲面的最自然的推广是E^n的超曲面。如果要问具有相同边界的超曲面中，体积变成最小应具有什么条件？那么就会得到其几何条件是平均曲率为零，而解析条件是对于非参数形式$X_n=F(x_1,\cdots,x_{n-1})$的曲面要满足方程

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P_i}{W}\right)=0,\quad P_i=\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$W=\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}P_i^2\right)^{1/2}。\tag{1}$$

一个长期未解的问题是：Bernstein定理能否推广到这种情形，即对所有$x_1,\cdots,x_{n-1}$定义的方程（1）的每个解是否是线性的？由Giorgi〔1〕证明了$n=4$的情形，而当$n=5$的情况是由Almgren〔2〕证明的，Simons〔1〕证明了$n=6$，7，8那几种情形，对于任意n，较弱形式的Bernstein定理已被证明，其中F是线性的结论是通过强加了一个附加限制后而得到的。例如W是有界的(Moser〔1〕)或F是正的(Bombieri, De Giorgi和Miranda〔1〕)，后一篇论文也包含了另一些近代关于极小超曲面理论的文献（*）

* 见附录3，6.IB。

（*）看起来好像是Bernstein定理的问题恰好以最意想不到的形式被解决。Bombieri〔1〕宣布可以构造一个反例来说明，虽然Bernstein定理在$n\leqslant 8$时是正确的，而当$n>8$时却不成立。详细情形见Bombieri，De Giorgi和Giusti〔1〕的论文。

Miranda〔1〕在最近一篇论文中给出了与定理7.2类似的定理，而 De Giorgi 和 Stampacchia〔1〕给出以下关于可去奇点的定理：在一个去掉了豪斯道夫测度为零的n－2维紧致子集E的区域 D 内，方程（1）的每一个解可扩展成在整个D内的解。*

至今为止第 8 节和第 9 节参数曲面的结果还不可能扩展到超曲面上去。

最后，Jenkins 和 Serrin〔3〕得到了关于定理10.3的推广。即，设 D 是E^{n-1}内有 C^2级边界的有界域，H是边界关于内法向的平均曲率，则对任意指定的 C^2 级边界值方程（1）在 D 内均有解的充要条件是在边界上 $H\geqslant 0$ 处处成立。

B. 其它超曲面

在前面提到的Jenkins和Serrin的结论已由Serrin〔3〕进一步扩展到包括常平均曲率曲面的方程在内的更广泛的一类方程。他的结论是：在如同前面相同的假设下，对应于任意预先规定的C^2级边界值存在着常平均曲率C的超曲面的充要条件是在边界上每一点处都有$H\geqslant C(n-1)/(n-2)$ 成立。

我们还可注意到，在Chern最近的一篇论文〔2〕中还包含了以下一些结论：如果在整个$x_1,\cdots,x_{n-1}$空间之上，$X_n=F(x_1,\cdots,x_{n-1})$确定了一个常平均曲率 $H\equiv C$ 的超曲面，则事实上$H\equiv 0$。

Ⅲ. E^n内的极小簇

现在研究 E^n 内 K 维极小簇的一般情形，其中$2\leqslant K\leqslant n-1$。在Reifenberg〔1〕及Federer和Fleming〔1〕的论文出现以前，对中间值 $K(2<K<n-1)$ 的研究进展很小，他们不

* 见附录3，6.ⅠA和6.ⅡB。

用参数方法(包括早已有的非参数法)而引进了一类适当的对象，这类对象主要用测度论方法来讨论。特别是Reifenberg〔1，2，3〕证明了在某种确切的意义下总存在具有已给边界A的紧致集X，使得除了（K－1）维豪斯道夫测度为零的可能子集外，集合X－A是K维极小簇。

这些方法被Almgren〔1〕和Morrey〔3〕作了进一步的研究。Morrey的著作是关于这种理论的一本杰出参考书，是用微分方程和变分法的观点来研究的。

关于这些方法的一个重要问题是奇（异）集是否真能出现？Simons〔1〕证明了在n≤7维超曲面的情形下，集合X－A是一个没有奇异性的实解析极小簇。他也给了对于n＝8时，一个在原点有奇异性的锥的例子，提供了Plateau问题的相对极小值。Bombieri〔1〕宣布了一系列的结果，这些结果证明了Simons的锥面表示一个绝对极小值。因此得到了有关解的正则性的反例。在Bombieri，De Giorgi和Giusti〔1〕中有详细地介绍。

Ⅳ．黎曼流形的极小子簇

在黎曼流形中二维极小曲面的理论已经被一些作者研究过了（例如Lumiste〔1〕，Pinl〔2〕）。Morrey〔1〕证明了在黎曼流形的情况下也能解决Plateau问题。最近Morrey〔2,3〕推广了Reifenberg的工作，从欧几里德空间推广到黎曼流形。Almgren〔1,2〕和Frankel〔1〕研究了极小子簇的拓扑性质。

我们早已注意到在C^n空间中的一条复解析曲线可以看作是E^{2n}空间内的一个实二维曲面，它总是一个极小曲面。把这个论述推广为Kähler（凯拉）流形的Kähler子流形是一个极小簇。关于这点以及有关的论述可参见Gray〔1〕最近

的论文。

Simons〔1〕关于极小簇理论作了重要贡献。他得到了一个任意黎曼流形极小簇的第二基本形式满足二阶椭圆型方程。有一些应用，包括前面所提到的（在ⅡA中）Bernstein定理的推广，以及统一和推广了前述的大部分理论。

在过去的二、三年中一些球面的极小子流形是特别集中研究的对象。除上面所提到的一些论文外还要注意Calabi〔2〕的工作，他把复变函数用到n维球内的二维极小曲面上去，也要注意Chern，De Carmo，Kobayashi〔1〕，Hsiang〔1，2〕，Lawson〔1，2，3〕，Otsuki〔1〕，Reilly〔1〕，Takahashi〔1〕，Takeuchi和Kobayashi〔1〕的论文。在这些论文中所讨论的主要结论可以在Osserman〔9〕中找到。

在这本概论中不能把所有人的工作都提到，而提到的也只是简略的评述，对这点我深表歉意。对于读者，我希望至少从深度或广度来讲能使读者获得一些关于现代极小曲面方面的一些基本观念。

附 录 3

1970—1985年关于极小曲面的进展

1. Plateau问题

在过去的二十年中，与Plateau问题有关的许多基本问题已经被解决。Douglas的存在性定理（定理7.1）已改进为如下形式：设Γ为E^3中的任意约当曲线，则存在以Γ为边界的正则单连通极小曲面。（见Osserman〔11〕，Gulliver〔1〕，Gulliver，Osserman和Royden〔1〕以及Alt〔1〕）。更进一步

的问题是：所得到的极小曲面是否为嵌入曲面（即曲面没有自交点），以及在什么条件下解是唯一的。如果曲线Γ在一个凸体的边界曲面上，Meeks和Yau（丘成桐）〔1〕证明了曲面为嵌入。此外，Almgren和Simon〔1〕，Tomi和Tromba〔1〕也独立地证明了有关嵌入的一些结果。在他们之前，Gulliver和Spruck〔1〕附加了Γ的全曲率最多为4π的条件，也证明了上述结果。

在所有上述结果中，所谓"以Γ为边界的曲面"（或Douglas解）这句话是不太恰切的，因为一般来说，我们没有唯一性的结论。一个有趣的例子是恩纳伯曲面。在恩纳伯曲面的标准表示中（见第65页），若用Γ_r记圆$|\xi|=r$的像，Nitsche〔10〕曾证明当$1<r<1+\varepsilon$时，Plateau问题至少有三个不同的以Γ_r为边界的解。另一方面，Ruchert〔1〕曾证明：当$0<r\leqslant 1$时，解是唯一的。Ruchert的证明利用了由Nitsche〔9〕得到的一个唯一性定理的改进形式：如果E^3中一条实解析约当曲线其全曲率不超过4π的话，则有唯一的单连通极小曲面以此曲线为边界。Almgren和Thurston〔1〕构造了有趣的反例。他们证明：任意给定ε和正整数g，在E^3中存在一条约当曲线Γ具有以下性质：Γ的全曲率不超过$4\pi+\varepsilon$，而且以Γ为边界的任何嵌入极小曲面的亏格至少为g。如果去掉单连通性的要求，关于高拓扑型的Douglas解的正则性，Gulliver〔2〕得到了许多结果（那里曲面的拓扑型事先给定），以及Hardt和Simon〔1〕的基本定理证明了对E^3中任意给定的约当曲线均可张成一个正则的嵌入极小曲面。

对于E^n，$n\geqslant 4$的情形，虽然Douglas的基本存在性定理7.1仍然成立，但是正则性和唯一性均破坏了。一个重要的

例子是E^4中的曲面S,S以非参数的方式表示为：$x_3 = \mathrm{Re}\{R(x_1+ix_2)^4\}$，$x_4 = \mathrm{Im}\{R(x_1+ix_2)^4\}$，$|x_1+ix_2|\leqslant 1$，R为正常数。正如在§2的末尾所说，S是一极小曲面，S的边界是一条约当曲线。Federer〔1〕证明S实际上是以Γ为边界的唯一的具有最小面积的定向曲面。因此，在此情形Douglas解是唯一的。但另一方面，Morgan〔1〕证明存在一个以Γ为边界的不可定向极小曲面S^*，而且对于充分大的R，存在E^4的单参数族的等距运动，将Γ映为自身而将S^*映为一族互不相同的以Γ为边界的具有最小面积的极小曲面。Federer的定理也给出例子说明Douglas解不一定正则而有枝点。

即使对于非参数解，唯一性也不一定成立。因此，在定理7.2中，当n＝3时由引理10.1保证解是唯一的，但对n⩾4时，在单位圆上存在任意光滑的边值，使得解不唯一（Lawson和Osserman〔1〕）。

White的文章〔2〕给出一个一般性的正则性定理：对E^n中几乎所有的光滑闭曲线，以它为边界的未定向的面积最小曲面没有奇点。

回到E^3，Morgan〔3〕给出另一个例子说明：存在具有相同边界的不同极小曲面的连续统。在他的例子中，其边界是四个不相连的圆。而另一方面，在上面提到的Hardt和Simon的文章〔1〕中，他们证明了如果Γ是E^3中充分光滑的约当曲线的并，则Γ仅能张成有限多个定向的面积最小的曲面。他们的结果利用了Böhme和Tomi〔1〕以及Tomi〔1〕的早先的基本工作。关于有限性方面的进一步的工作，请参见下列文章：Tromba〔1〕，Morgan〔2，5〕，Nitsche〔Ⅱ〕，Beeson〔2〕，Koiso〔1〕，以及Böhme和Tromba〔1〕。

另一个有重大进展的方面是边界的正则性，这个方面有

许多作者研究过，他们都根据Hildebrandt〔3〕的原始的突破性工作。详细的内容请见Nitsche的书[Ⅱ](第Ⅴ章，§2.1)以及Hardt和Simon的文章〔1〕。

最后我们要注意由Beeson〔1〕提出的关于正则性的完全不同的途径，他在一个分枝点的邻域利用变分方法。关于极小曲面上的分枝点的基础知识，请参见Ossevman〔1〕和Nitsche〔Ⅱ〕，V2.2关于Plateau问题的更多的内容及许多未解的问题，请看Meeks的讲义〔1〕。

2. 稳定性

在面积极小的曲面类和所有极小曲面类之间有一类极小曲面：稳定极小曲面。有各种各样的稳定性的定义，但本质上来说，稳定的极小曲面是相对于具有相同边界的附近曲面其面积最小。因此，稳定的极小曲面正好就是人们期望用物理实验得到的那些曲面。按照我们在§3的讨论，曲面的极小性等价于曲面在保持边界固定的所有变形之下其面积的第一变分$A'(o)$为零。因此，曲面的极小性，是使曲面达到面积最小的必要条件。然而如果对某些变形来说，第二变分为负，即$A''(o)<0$，则在附近存在面积更小的曲面。我们称曲面是不稳定的。

近几年来，稳定性变得越来越重要了。下面列举所得到的部份结果：

Barbosa和do Carmo〔1〕证明了对于E^3中的曲面S，如果S的高斯映射的像的面积小于2π，则S是稳定的。也就是说，对于所有固定边界的变形，面积的第二变分为正。这个结果在Nitsche关于唯一性和有限性的定理[9，Ⅳ]中有重要的应用。其后，Spruck〔1〕将他们的结果推广到E^n中极小曲面，他用广义高斯映射(12.7)来代替高斯映射。Spruck

的结果又被Barbosa和do Carmo〔2〕所改进，他们证明了对E^n的单连通极小曲面条件$\iint |K| dA < 4\pi/3$可推出稳定性。

所有上述结果均涉及稳定性的充分条件。而在另一方面，稳定性的假设往往有重要的推论。一个例子是Schoen〔1〕的最近结果。他对于稳定曲面得到类似(11.1)的不等式。明确地说，Schoen证明：存在一个通用常数C使得如果S是E^3的稳定极小曲面，则对S上的任一点P，S在P点的高斯曲率K满足$|K(p)| \leqslant c/d^2$，其中d是P点到S的边界的距离。容易证明非参数极小曲面关于边界是面积最小的。因此是稳定的。因此，Schoen的结果是Heinz不等式(11.7)的推广，因此都能推出Bernstein定理。这个结果也可推出早先由Fischer—Colbrie和Schoen〔1〕以及由do Carmo和Peng(彭家贵)〔1〕所得到的结果：如果S是E^3的完备的整体稳定极小曲面则S为平面。这里的假设"S整体稳定"的意思是S上的每一个相对紧的区域D都是稳定的。

另一类面积最少的曲面(因而是整体稳定的曲面)是$\mathbb{C}^n$中的复全纯曲线，将它们看作E^{2n}中的实曲面(见Federev(1))。Micallef的一篇文章〔1〕对稳定性的研究作了大量的工作，其中包括证明了E^4中的完备的整体稳定极小曲面在某些附加条件下必须是关于E^4的某个正交复结构的全纯复曲线(这时E^4看成$\mathbb{C}^2$)，其附加条件分别为对高斯映射的限制，有限全曲率或曲面是非参数的。最后这个条件也曾由Kawai〔1〕独立地得到。特别由此结果可知，由极小曲面方程所得到的整体解，如(5.19)，一定是不稳定的，尽管它们是非参数的。

Schoen的文章〔1〕不仅应用到E^3中的极小曲面而且也应用到三维黎曼流形中的极小曲面。黎曼流形中的稳定极

小曲面的研究是近年来非常富有成果的並取得了一些最重要的进展，这些将要在§6，Ⅳ.A和§6，Ⅱ中加以讨论。

3. 等周不等式

等周不等式在近年来对极小曲面的研究起到两方面的作用。首先关于极小曲面上的区域的等周不等式已应用到许多方面（对于这些应用的讨论可见Osserman〔Ⅱ〕的§4)。其次，关于任意曲面的等周不等式已应用到极小曲面理论。例如Barbosa和do Carmo〔1，2，3〕以及Spruck〔1〕关于稳定性的工作依赖于极小曲面在（广义）高斯映射下的像的等周不等式。

一个著名的猜想是古典的等周不等式$L^2 \geqslant 4\pi A$对于E^n中的极小曲面上的任意区域也应该成立，其中A是区域的面积，而L是边界的长度。直到最近仅仅知道由单条约当曲线所围成的定向区域是成立的。（新的更简单的证明已由Chakerian〔1〕和Chavel〔1〕给出），然后，对于双连通的区域也得到了证明，首先由Osserman和Schiffer〔1〕证明了E^3的情形，然后Feinberg〔1〕证明了一般的情形。从这些可以推出对极小麦比乌斯带也成立（Osserman〔13〕）。除非加上一些附加的假设，对极小曲面上任意拓扑型的区域的精确的等周不等式仍然不知道。（见Li，SChoen和Yau〔1〕，那里有一些假设）更详细的讨论可看Nitsche〔Ⅱ〕，§323和Osserman〔Ⅱ〕，§4。

4. 完备极小曲面

近年来最引人注目的结果之一是Xavier〔1〕的一个定理，这个定理填补了定理8.2和定理8.3之间的空隙，並对于回答第74页的问题前进了一大步。Xavier所证明的事实是：E^3中非平坦的完备极小曲面的法方向最多能不取6个方向。

定理证明的方法与定理 8.2 的证明很不一样。还看不出来可以将不取的方向的个数缩减到 4 。由定理 8.3 知道 4 是可能最佳的数，因此，确定 E^3 中非平坦完备极小曲面的法方向能不取的方向的精确个数仍然是个未解的问题。*

Xavier 的定理表示了 Bernstein 定理（定理5.1的推论 1 ）的很强的推广。Bernstein 定理在不同方向的二个推广也已得到证明。一个是前面讨论过的关于完备的整体稳定的极小曲面的定理。另一个是 Schoen 和Simon〔2〕的一个定理。他们用面积增长率的假设来代替高斯映射的条件或稳定性条件。明确地说，他们证明了下述定理：设 S为嵌入在E^3中的单连通完备极小曲面。对S上的某个定点P，用 $S_p(v)$记S与以P为心 r 为半径的球相交的部份。设$A(r)$为$Sp(r)$的面积，如果 $A(r)<Mr^2$，对某一常数M，则S必须是平面。利用非参数极小曲面的面积最小性质並且将$S_p(r)$和半径为r的球面上具有相同边界的区域的面积加以比较，容易看到经典的Bernstein定理是Schoen—Simon定理的推论。

一个激动人心的发展是发现了二百多年来第一个新的具有有限亏格的完备的嵌入极小曲面。以前仅知道的例子是平面，悬链面和螺旋面。Jorge和 Meeks的一篇文章〔1〕研究了产生完备的嵌入极小曲面的维尔斯特拉斯(Weierstrass)表示所需要的必要条件。利用他们的条件，Costa〔1〕证明在维尔斯特拉斯表示（8.2），（8.6）中存在一个常数C使得选取 $f=p$， $g=c/p'$，其中p是单位正方形上的维尔斯特拉斯椭园P函数，就能产生E^3中亏格为 1 的完备极小曲面，这个曲面有三个嵌入的开口。Hoffman利用计算机绘图画出了 Costa 曲面的漂亮的图形，从图形清楚地看到 Costa 曲面是

* 最近，此问题已由Fu ji Moto完全解决—译注。

嵌入曲面。（见Peterson〔1〕）。Hoffman 和 Meeks〔1〕给出嵌入性的解析证明。随后Hoffman和Meeks〔2〕找到每一个亏格的完备嵌入极小曲面。

回到法向量的分布问题。我们注意到Gackstatter〔1〕证明了 E^3 中的非平面的完备阿贝尔（Abel）极小曲面的法向量至多不取4个方向。完备的阿贝尔极小曲面是具有有限全曲率的完备极小曲面的推广。对于阿贝尔曲面，(4.6)的函数 φ_k 可以扩充为一个紧致黎曼面上的半纯函数，但 $x_k = \mathrm{Re}\int\varphi_k$ 不一定单值。由于定理8.3中的曲面都是阿贝尔曲面，所以Gackatatter定理中的"4"是最佳的。

最后关于 E^3 中具有有限全曲率的完备极小曲面的更进一步结果，请看下列文章：Meeks〔3〕, Jorge 和Meeks〔1〕, Gulliver〔3〕以及Gulliver和Lawson〔1〕。

E^3 中的完备极小曲面也有许多作者研究过。在新近的结果中，我们注意下面的事情。

Gackstatter〔2〕研究了 E^n 中具有有限全曲率的完备极小曲面S上的各种量之间的关系。令 m 为 E^n 包含S的最小仿射子空间的维数，k为S的边界点的个数，g 是S的亏格，则S的全曲率适合

$$\iint_S K\,dA \leqslant (3-m-k-4g)\pi$$

这个结果补充了定理9.3中的不等式(9.22)，它对于 E^3 和 E^n 都成立（Chern和Osserman〔1〕）。将这两个结果结合起来，可以证明下列的结果(定理9.4的补充)：如果 $\iint_S K\,dA = -4\pi$，则 S 或者是单连通的且 $m \leqslant 6$，或者S是双连通的（$g=0$，$k=2$）且 $m \leqslant 5$。这个定理首先是由C.C.Chen〔3〕用其它方

法证明的。事实上，我们可以完全刻划全曲率为-4π的曲面（Hoffman和Osserman〔1〕），双连通的曲面是特别有趣的。它们是一种广义的悬链面。其意思如下：这种曲面由一单参数的椭圆（或圆）族所生成，而这族椭圆是所有有固定方向的超平面与曲面的交线。与此有关，我们注意C.C.Chen〔2〕的另一个结果：在E^n中等距于悬链面的极小曲面S其本身就是在一个三维仿射子空间内的悬链面。

最后注意到全曲率为-2π的完备极小曲面有非常简单的特征：令(z, w)为$\mathbb{C}^2$的坐标，对每个实数$C>0$，函数$w=cz^2$的图代表了E^4中全曲率为-2π的极小曲面。E^n中全曲率为-2π的完备极小曲面均处在一个4维的仿射子空间内并且合同于上述曲面的某一个。这个定理是C.C.Chen〔3〕的一定理的稍稍改进。更进一步的结果可看Hoffman和Osserman〔1〕。

上述刻划全曲率为-2π和-4π的完备极小曲面的结果也可以从刻划亏格为零并具有给定全曲率的完备极小曲面的更一般结果推出来（Hoffman和Osserman〔1〕，命题6.5）。特别，对于亏格为零的极小曲面，我们有一般的构造。正如在第89页上所提到的，能够找到更多的具有高亏格的例子是有趣的。Gackstatter和Kunert〔1〕证明：给定任意紧致黎曼$\overline{M}$，存在点列$P_1,\cdots,P_k$，以及E^3中的具有有限全曲率的完备极小曲面S，S由映射$x(p): M\to E^3$确定，其中$M=\overline{M}-\{P_1,\cdots,P_k\}$。实际上，他们的方法对给定的$\overline{M}$给出许多这样的曲面，包括共形不等价的连续统。剩下要研究的事情是点列$P_1,\cdots,P_k$能确定到何种程度。（也看Chen和Gackstatter〔1〕，对于不可定向的曲面请看Oliveira〔1〕）

不加上有限全曲率的假设，Xavier 的定理最近由 Chen〔4〕推广到E^4而由Fujimoto[1]推广到E^n。Fujimoto证明了假若S为E^n中的完备极小曲面且具有非退化的高斯映射g，则g(s)必须与一般位置的n^2个以上的超平面相交。Fujimoto〔2〕以关于高斯映射的 Nevanlinna型定理的形式卓著地推广了所有这些皮卡型定理。

5. 极 小 图

E^3中的极小图的许多结果只部份地或根本没有推广到高维。

定理7.2断言对于凸的平面区域及任意一组连续的边界函数，极小曲面方程的解存在。对于边界函数只有一个的情形，从引理10.1可知解是唯一的。但是对一般情形唯一性不成立。事实上，即使D是单位圆盘，也可以证明：在D的边界上存在一对实解析的函数使得极小曲面方程在D中有三个不同的解（Lawson和Osserman〔1〕）。

另一个不能从E^3推广到E^n的结果是Bers定理10.2，Bers定理断言极小曲面方程的解不能有孤立奇点。但是一到$n=4$，就有简单的反例，例如复函数$W=1/z$看成一对两个实变量的函数。然而我们有下列结果（Osserman〔12〕）：设$f(x_1, x_2)$是极小曲面方程（2.8）在$0<x_1^2+x_2^2<\varepsilon$（对某个ε）中的向量值解。假定f的所有分量，至多有一个例外，可以连续地扩充到原点，则f可以光滑地扩充到原点並满足方程（2.8）。这个结果包含了Bers定理以及由Harvey和Lawson〔1〕独立地证明的下述结果：如果$f(x_1, x_2)$在$x_1^2+x_2^2<\varepsilon^2$中连续並且在$0<x_1^2+x_2^2<\varepsilon^2$中适合方程(2.8)则f为整个圆盘上的解。

最后注意 Simon〔2〕推广了 Nitsche 以及 de Giorgi和

Stampacchia的著名的奇点定理（见第98页），他去掉了例外集E是D的紧子集这一假设。

6. 推　广

这里我们将采用附录2的顺序並且只列出一些最有关连的结果。

Ⅰ. E^3中更广的曲面类

A. 常中曲率曲面

关于常中曲率曲面的Plateau问题，Wente〔1〕设计了一条全新的途径而且在Steffen〔1，2〕和Wente〔2〕中作了详细说明（细节和进一步的参考文献请见这些文章）Wente的方法在体积约束条件下寻求面积的极小化，这与Heinz〔2〕的早期方法是不同的，Heinz的方法是考虑事先给定的平均曲率的变分问题。

定理8.1的类似，已由Hoffman，Osserman和Schoen〔1〕所证明。他们证明了假若S为E^3中常平均曲率的完备曲面且高斯像在闭半球内，则S为平面或正圆柱面。完备的常中曲率的旋转面的例子说明：高斯像可以在包含大圆的任意窄条内。

由Ruh〔1〕所观察到的一个重要事实是：曲面有常中曲率的充要条件为高斯映照是调和映照。细节和调和映照的一般理论可看Eells和Lemaire〔1，2〕（也参看下面Ⅵ中对调和映照作的注释）。

Kenmotsu〔1〕得到了常中曲率曲面的表示定理，类似于引理8.1和引理8.2的魏尔斯特拉斯表示定理。他证明了假若g是单连通区域D到单位球面Σ的调和映照，则在E^3中存在常中曲率曲面S由分枝浸入x：D→E^3所确定，其中D的坐标为S上的等温参数，而映射g是浸入映射D→S和高斯映

射S→Σ的复合。更为一般地，对于E^3中具有变动的中曲率H的任意曲面，Kenmotsu 推导出一个与中曲率 H 及高斯映射有关的可积性条件并得到一个广义的维尔斯特拉斯表示定理。沿这个方向的更进一步的结果请看Hoffman和Osserman〔4〕。

虽然有点儿离题，但要指出近年来关于常中曲率曲面的最惊人的结果是 Wente〔3〕回答了 Heinz Hopf的一个老问题：在 E^3 中是否存在与标准球面不同的具有常中曲率的紧致浸入曲面？Wente证明了存在这种曲面，其类型是浸入环面。

稳定性的一些概念也可以用于常中曲率曲面。关于这些的讨论及最近的结果请看Barbosa和do Carmo〔5〕，Palmer[1]，以及da Silveria〔1〕。

B. 拟极小曲面

在第 137 页上提出的问题已由 Simon〔4〕（定理4.1）所解决，他证明了Bernstein定理对任意拟极小曲面仍然成立。早先提到的Schoen和Simon的文章〔2〕对拟极小曲面也成立，在那里 Bernstein 定理的条件由非参数表示推广为面积增长率的限制。Simon 的另一篇文章〔5〕将 Heinz 不等式（11.7）和Bers定理10.2和11.2推广到拟极小曲面，那些拟极小曲面是所谓“中曲率型”方程的解。这一类方程比早先由Finn〔2，4〕以及Jenkins和Serrin〔1，2〕所考虑过的方程要广泛得多。

C. 有限全曲率的完备曲面

White的最近一篇文章〔3〕证明了在第 9 章中关于完备曲面的高斯映射和全曲率的许多结果对更广泛的曲面也成立。既不要假定极小性也不要假定任何局部条件，White重

新证明并推广了定理9.1，定理9.2和引理9.5。他只假定S为E^3中的完备曲面且满足条件$\int_S (2H^2-K)dA<\infty$。他也得到了E^n中的类似结果。推广了Chern和Osserman的那些结果。

Osserman的文章〔14〕证明了在E^n中由多项式映照所确定的曲面一定具有有限全曲率；假若曲面再是正则完备的曲面，则一定共形于平面。

Ⅱ. E^n中的超曲面

A. 极小超曲面

过去二十年中主要进展之一是Schoen，Simon和Yau的文章〔1〕，他们得到了逐点的曲率估计，将Heinz不等式（11.7）推广到$E^n(n<6)$中的非参数极小超曲面。直接的推论是对$n<6$给出了Bernstein定理的新证明。更重要的是所采用的方法导致了许多进一步的结果（见下面的ⅣA）。Simon〔1，3〕对原来的文章作了许多改进。

参数Bernstein定理8.1的高维形式由Solomon〔1〕得到。事实上，他给出了一个有限形式，类似于定理11.1（Osserman〔2〕）的参数形式：令M为E^n中光滑的面积最小的超曲面。假设M的第一上同调类为零而且M的高斯映像不取（n－1）维球面上某个（n－3）维大圆的邻域U，则存在只依赖于n和U的常数C使得对于M上的任意点p有

$$K_1^2+\cdots+K_{n-1}^2\leqslant c/d^2,$$

其中d是点p到M的边界的距离，而$K_1,\cdots,K_{n-1}$是M在p点的主曲率。

关于$E^n(n\leqslant 7)$中各类极小超曲面的Plateau问题的解，Morgan〔5〕得到了许多有限性定理。

在另一个方向上，Simon〔2〕改进的 de Giorgi 和 Stampacchia的可去奇点定理对所有维数都成立。

下述问题曾由许多作者研究过：给定一个黎曼度量，什么时候能实现为E^n中的极小超曲面？当 n=3时曾由 Ricci—Curbastro〔1〕处理过，而对高维的情形，Pinl 和 Ziller〔1〕以及Barbosa和 do carmo〔4〕曾研究过。关于进一步的条件以及整个课题的概论可看Chern和Osserman〔2〕。

B．其它超曲面

在上面提到的 Simon 的文章〔2,3〕，他证明了广义 Heinz不等式,Bernstein定理以及de Giorgi—Stampacchia 定理对更广泛的超曲面均成立。特别，他将Jenkins〔1〕关于二维的参数椭圆泛函的结果推广到三维並且证明了如果泛函的被积函数充分接近面积积分时，则对于相应的非参数欧拉—拉格朗日方程来说，只要n≤x，Heinz不等式和 Berstein 定理依然成立。

早先提到（6，I，A）的 Hopf 问题的高维形式已由 W.Y.Hsiang〔3〕作出回答。他证明了对于所有n≥3,存在n维球面到E^{n+1}的具有常中曲率的非标准浸入。(Hopf证明n=2时不可能发生）。

Ⅱ．E^n中的极小簇

一个重要的突破是White的文章〔1〕，他解高维的 Plateau问题。明确地说，对 4≤n≤7，(n－2)维球面到E^n的任何光滑映射都可扩张为（n－1）维球到E^n的 Lipschitz 映射，使得在所有这样的映射中其 n－1 维面积达到最小。实际上，对所有维数n≥4，从Lipschitz映射（参数问题）所得到的面积的下确界与用积分流或奇异链所得到的下确界是一样的。这个结果与E^3的情形有明显的差别。例如在E^3

的情形由给定约当曲线所围成的高亏格曲面的面积可以比由映射单位圆盘所得到的参数(Douglas)解的面积要小得多。

其它一些最有趣的结果与任意维数和余维数的极小图有关。E^n中的m维图由一组函数$x_k=f_k(x_1,\cdots,x_m)$，$k=m+1,\cdots,n$，或用向量值函数$f(x)$，其中$x=(x_1,\cdots,x_m)$，$f=(f_{m+1},\cdots,f_n)$来确定，相应的子流形在E^n中为极小的充要条件是f满足极小曲面方程

$$(*)\qquad \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=0\ .$$

其中$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$，而$g_{ij}=\delta_{ij}+\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}$.方程(2.8)

是上述方程的特别情形(m=2)（见Osserman〔9〕，P.1099.和〔V〕）。

高余维极小簇的令人惊讶的结果之一与狄利克雷问题有关。Lawson和Osserman〔1〕证明了在E^4中的单位球的边界上可以给出三个二次多项式使得它们不能为极小曲面方程组的任何球内解的边界值。因此定理7.2对维数为4，余维数为3的情形不成立，而定理7.2对于维数为2而任意余维数以及任意维数而余维数为1的情形是成立的。在同一篇文章中的另一个结果是存在一个明确给定的维数为4，余维数为3的极小锥，这个锥除原点外处处适合极小曲面方程组，在原点连续但有一个不可去奇点。

关于任意维数和余维数的Bernstein型定理已由Hildebrandt，Jost和Widman〔1〕给出：令f(x)为极小曲面方程（*）在整个E^m上的解。假设存在一个数$\beta_0<1/\cos^p(\pi/2\sqrt{Kp})$，其中$p=\min(m,n-m)$而当$n=m+1$时，$K=1$；当$n>m+1$时，$K=2$。使得$|\det(g_{ij})|^{1/2}\leqslant\beta$。处

处成立，则f的所有分量f_i均是$x_1,\cdots,x_m$的线性函数。

因此只要梯度具有适当的上界则整体解只能是仿射子空间。对于超曲面 $n=m+1$ 的情形，上述条件变为函数f的梯度的一致上界条件，此结论就是Moser〔1〕的定理。

在研究高维和高余维的极小子流形时，一个困难是缺少例子。在这方面Harvey 和 Lawson〔Ⅰ，3〕的最近工作是特别有意思的，他们证明了可以用某一类闭微分形式来挑选欧氏空间中的子流形，而这些子流形在它们的同调类中达到面积最小。他们构造的一类特殊情形是$\mathbb{C}^n$中的 Kähler 子流形，这里将$\mathbb{C}^n$看作E^{2n}。他们也给出了一些别的明显的例子以及这些例子必须适合的偏微分方程。作为特殊情形，他们重新得到前面提过的Lawson和Osserman的极小锥，这个锥不仅是极小曲面方程的解，而且相对于它的边界其面积达到绝对极小。

对于面积绝对极小的子流形(或更一般地，对积分流)，Almgren〔4〕证明了人们长期探求的精确的等周不等式，其等周常数与同维欧氏空间的开子集的等周常数相同。

关于完备的极小子流形，最近Anderson〔3〕作了一些要紧的工作。他把关于具有有限全曲率的完备极小曲面的结构及高斯映射的主要定理推广到任意维数和余维数的极小子流形，我们在第 9 章对 E^3 中的曲面证明了这些定理而且由Chern和Osserman〔1〕推广到E^n中的曲面。

Ⅳ. 黎曼流形的极小子簇

从欧氏空间转向更一般的黎曼空间作为外围空间，无疑代表了近年来的最活跃的邻域。主要区别之一是在黎曼流形中允许有紧致的极小子流形。我们只能从大量的成果中选择一小部份。

A. 存在性定理

将几何测度论方法（特别Almgren〔1〕）和Schoen, Simon和Yau〔1〕的方法结合在一起，Pitts〔1〕得到了最引人注目的一般的存在性定理，包括下述定理：令M为C^k类n维紧致黎曼流形，其中$3 \leqslant n \leqslant 6$，$5 \leqslant K \leqslant \infty$。在M中存在$C^{k-1}$类的非空的嵌入紧致极小超曲面。Schoen和Simon〔1〕采用稍为不同的方法可以把Pitts的结果推广到$n \leqslant 7$，並且对任意维数的稳定的极小超曲面证明了一个重要的正则性定理。在这两篇文章中，稳定性均起了基本的作用，正如在Schoen, Simon和Yau〔1〕文章中一样，许多部份可以应用到任意黎曼流形的稳定极小超曲面。

还有许多更特殊但非常重要的存在性定理。在这些定理中，我们注意到Lawson〔6〕的定理：在3维球中存在任意亏格的紧致极小曲面。他还证明了一个与Sacks和Uhlenbeck〔1〕的结果相对应的定理：在一大类黎曼流形中存在拓扑型为二维球面的广义极小曲面。Sacks和Uhlenbeck的后一篇文章〔2〕证明了高亏格的紧致曲面的极小浸入的存在性。类似性质的结果也已由Schoen和Yau〔1〕得到並应用于三维流形的研究（见下面的Y.A.B）。

B. 常曲率空间中的极小曲面

球面上的极小曲面继续得到广泛地研究。关于这些研究的新近结果以及早期工作的参考文献，请看文章Barbosa〔1〕和Fischer—Colbrie〔1〕。也有一些工作讨论双曲空间和紧致平坦流形中的极小曲面。可以参看Meeks〔1, 2〕, Micallef〔2〕以及Nagano和Smyth〔1〕，这些文章中还有更多的参考资料。

在上面的这些课题中，我们提出下列结果：

a）类似于定理8.1和定理8.2的结果：球面上的紧致极小子流形，如果法向量不取足够大的集合则它必须是一个低维的大球。这种类型的第一个结果是Simons〔1〕得到的；至今最好的结果以及早期工作的参考资料可在Fischer—Colbrie〔1〕中找到。

b）稳定性：第一个结果也是由Simons〔1〕得到，然后由Lawson和Simons〔1〕得到。我们特别注意如下事实：在标准球面上不存在稳定的紧致极小子流形。Barbosa—do Carmo〔1〕的定理已有许多作者加以推广，特别是Barbosa和do Carmo〔2，3〕，Mori〔1〕，以及Hoffman和Osserman〔2〕。关于稳定性方面的更详尽的概述，可以看do Carmo〔I〕。在下面的V中我们要给出有关稳定性的许多应用。

c）“球面Bernstein问题”：Hsiang〔4〕证明了对$n=4$，5，6，在S^n中存在与大球不同的极小嵌入的超球。

C．具有极小叶片的叶状结构

极小曲面以令人惊讶的方式成为叶状结构的叶片。特别有许多新近的文章讨论了如何刻划具有下述性质的叶状结构：存在一个黎曼度量使得给定的叶状结构的叶片均为极小子流形（请看Rummler〔1〕，Sullivan〔1〕，Haefinger〔1〕以及Harvey和Lawson〔4〕）.

V．极小曲面的应用

近年来极小曲面理论已经用于解决其它数学分枝的许多重要问题。这里我们举几个例子。

A．拓扑学

Meeks和Yau的一系列文章〔1—5〕说明如何恰当地利用黎曼流形上的Plateau问题的解以得到具有纯粹拓扑性质的重要推论。最引人注目的例子是拓扑中所谓Smith猜想的

解决。其证明是把一系列的工作结合在一起，Meeks 和Yau的工作是其中的一部份。在新近文章中。Meeks，Simon 和You〔1〕用类似的方法得到了关于三维流形的其他一些纯拓扑的结果。

在稍为不同的方向上，Schoen 和 Yau〔1，2〕利用某类面积最小曲面的存在性得到在给定流形上具有正标量曲率的黎曼度量的存在性的拓扑障碍。在证明中极小曲面的稳定性起了重要的作用。更近一些，Gromov和 Lawson〔1〕采取稍稍不同的方式利用稳定极小曲面来研究标量曲率具有各种条件的度量的存在性问题。反过来利用那些结果又可推出在标量曲率具有下界的流形上，稳定的极小超曲面的拓扑性质。J.D.Moore〔1〕利用稳定的极小二维球的存在性推导出同伦论方面的结果。Lawson 和 Simons〔1〕及Aminov〔1〕得到了有类似性质的一些结果。还有Hass〔1，3〕和Nakauchi〔1〕也给出了极小曲面对拓扑学的其它一些应用。

B. 相对论

Schoen 和 Yau〔3, 4〕通过很精细的论证解决了相对论中一个熟知的猜想—“正质量猜想”，所采用的方法基本上是以上提到的文章中的方法的推广。利用这些文章中的方法他们后来得到了黑洞存在性的一个数学证明（Schoen和Yau〔5〕）。

Frankel 和 Galloway〔1〕给出了对相对论的另外一些应用。

C. 几何不等式

令C 为E^n中的约当曲线並设B为闭集且与曲线 C 环绕。（当 n= 3时，B 可为另一条闭曲线）Gehring 提出下述问题：如果B和C的距离为r，试证明C的长度L适合 $L\geqslant 2\pi r$，

这个不等式已有几个证明，包括Osserman[13]给出的一个证明。这个证明利用了关于曲线C的Plateau问题的解以及在所得到的极小曲面上的等周不等式。在那篇文章中指出了同样的证明方法可以对所有维数产生类似的结论，只要有了Plateau问题的参数解以及在所得到的曲面上的精确的等周不等式。但在那时这两方面的结果都没有，然而后来也相应地由White[1]和Almgren[4]所证明。顺便提一下，Bombieri和Simon[1]也得到了Gehring不等式的一个不同的证明。他们也利用了极小曲面以及由Gage[1]所给出的一个结果的加强形式。接着，Gromov[1]，P106得到了Gehring不等式的推广，他给出了处理整类几何不等式的新途径。在Gromov的论证中广义Plateau问题的解是基本的。

Ⅵ. 调和映照

近年来调和映照也越来越显得重要。调和映照与极小曲面有许多关连。首先，调和映照是直接的推广。事实上，如果映照f：M→N是一个黎曼流形到另一个黎曼流形的等距浸入，则f为调和映照的充要条件是f(M)为N的极小子流形。当M是二维流形时，f即使是共形映照，上述结论仍然成立。稍为更广一些，Hoffman和Osserman[2]证明：设f：M→N为共形映照，其共形因子ρ是一个光滑的非负函数而且除了一个零测集外均有ρ＞0，则当M的维数等于2时，f调和的充要条件是f(M)为N中的广义极小子流形，也就是说f是一个使得中曲率几乎处处为零的浸入；当M的维数大于2，则f调和的充要条件是f为同形映照（f在M的每个连通分支上为常数）並且f(M)是N的极小子流形。

给定映射f：M→N，可以假定N等距地嵌入在某个E^n中。设M的维数为2则在M上可以选取局部等温参数u_1, u_2，

这样映照f就可表示成$X(u_1, u_2)$，其中$x=(x_1, \cdots, x_n)$。像（4.6）那样，我们可以构造函数$\varphi_k(\zeta)=\frac{\partial x_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$並定义$\varphi(\zeta)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2(\zeta)$。如果f是调和映照则$\varphi$是个全纯函数。(看Chern和Goldberg〔1〕，§5，Sacks和Uhlenbeck〔1〕，命题1.5以及T.K.Milnor〔1〕），更进一步随着等温参数的改变，φ的变化规律如同一个二次微分$\varphi(\zeta)d\zeta^2$的系数。作为推论，如果M为标准的二维球面S^2则可推出$\varphi(\zeta)\equiv 0$。但这正好说明映照f为共形映照。由于共形映照的像是极小曲面因此可知任意调和映照$f: S^2\to N$的像是N中的极小曲面（Chern和Goldberg〔1〕，命题5.1）。

在调和映照和极小曲面之间的另一关系是：映照$f: M\to N$为调和映照的充要条件是f的图在$M\times N$中极小（Eells〔1〕）。

我们也注意到如果一个叶状结构是由黎曼浸上$f: M\to N$所决定的，则f为调和映照的充要条件是叶片在M中为极小。（见Eells和Sampson〔1〕。有关的结果也参看Kamber和Tondeur〔1〕）。

最后我们要注意Ruh和Vilms〔1〕的基本定理：设M为E^n的子流形则M到格拉斯曼流形的广义高斯映照g为调和映照的充要条件是M具有平行中曲率。特别若M为极小子流形则g为调和映照。

要进一步了解有关调和映照的基本事实及参考文献，可以看Eells和Sampson〔1〕以及Eells和Lemaire〔1〕。

近来调和映照已有了许多重要的应用。其中我们提及下列结果：

A. Hildebrandt，Jost和Widman〔1〕证明了调和映照

的Liouville型定理，然后通过Ruh—Vilms的定理应用于高斯映照，他们得到了任意维数和余维数的Bernstein型定理（见前面Ⅱ）。

B. Sacks和Uhlenbeck〔1，2〕，证明了调和映照的存在性定理，再加上有关共形结构的论证推出共形调和映照是一个极小曲面。

C. 近来物理学家已经研究调和映照（见Misner〔1〕，讨论了调和映照与物理模式之间的关联）。特别有许多物理学家研究如何刻划由标准二维球S^2到复投影空间$\mathbb{C}P^n$的所有调和映照（见Din和Zakrzewski〔1，2〕及Glaser和Stora〔1〕）。借助于上述结果可知所有这些映照都是共形映照，因此问题等价于找出$\mathbb{C}P^n$中的所有极小的二维球面。Eells和Wood〔1〕部份地受到物理学家的工作的启发，得到了一类紧致黎曼面，包括球面，到$\mathbb{C}P^n$的调和映照的完全分类。Chern和Wolfson〔1〕用不同的途径解决了同一问题。